ОПТИМИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Редактор серии

Н. Н. МОИСЕЕВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

ОПТИМИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Редактор серии

Н. Н. МОИСЕЕВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ

МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

518
Е 93
УДК 519.95

Методы стохастического программирования, Ермольев Ю. М. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

Книга посвящена численным методам решения нелинейных экстремальных задач вероятностной природы. Основное внимание уделяется развитию стохастических процедур поиска экстремума в задачах с ограничениями, для решения которых невозможно применить известные методы нелинейного программирования. Обсуждаются приложения к вопросам перспективного планирования в условиях неопределенности, оптимизации систем обслуживания, вопросам складирования, управления случайными процессами и запасами, к задачам математической статистики.

Книга построена таким образом, что для ее чтения не требуется серьезного знакомства со специальными разделами высшей математики. Она может быть полезна как специалистам-прикладникам, использующим в своей работе теорию оптимизации, так и научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в этой области.

$E \frac{20203-052}{053\,(02)\text{-}76}$ 69-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена численным методам решения сложных экстремальных задач, для которых неприменимы известные методы нелинейного программирования. Основные особенности рассматриваемых задач связаны с отсутствием полной информации о функции цели и функциях ограничений, о их производных и с негладким характером этих функций. Наиболее сложными являются те задачи, в которых отсутствует точная информация о значениях самих функций цели и ограничений, т. е. когда для заданного решения нельзя указать точного значения функции цели и проверить справедливость требуемых ограничений. Менее сложными оказываются задачи, в которых нет точной информации только о производных этих функций. Принципиальные трудности связаны также с отсутствием непрерывных производных функций цели и ограничений, поскольку в этом случае практически невозможно найти вектор, характеризующий направление их убывания или возрастания.

Экстремальные задачи с отмеченными особенностями являются типичными для различных приложений из области исследования операций. Например, с помощью кусочно линейных функций часто отражаются общие затраты производства с учетом его реконструкций, при этом разрывы производных отвечают скачкам себестоимости, связанным с определенными вариантами перестройки производства. Точные значения градиентов не вычисляются даже для классической задачи на безусловный экстремум при значительном числе переменных, ибо это требует составления значительного числа подпрограмм для вычисления всех частных производных. Отдельные частные производные не вычисляются точно для функций, заданных алгоритмически. Наиболее сложными оказываются функции, встречающиеся при оптимизации вероятностных систем — в стохастическом программировании: обычно они имеют негладкий характер, неизвестны точные значения производных и значения самих функций.

Основная идея предлагаемых численных методов, названных стохастическими квазиградиентными, состоит в использовании вместо точных значений градиентов или их аналогов (для негладких функций) случайных направлений — стохастических квазиградиентов, являющихся статистическими оценками этих векторов. В книге на примере различных задач указаны способы построения стохастических квазиградиентов, причем основное внимание уделяется задачам стохастического программирования.

Стохастическое программирование является тем разделом общей теории оптимальных решений, в котором изучаются вопросы выбора решений в ситуациях, характеризуемых случайными величинами. С формальной точки зрения стохастическое программирование — это теория решения экстремальных задач стохастической природы. Частные классы таких задач, как правило, задач на безусловный экстремум, встречаются в классической математической статистике, в современной теории статистических решений. В стохастическом программировании, вообще говоря, рассматриваются задачи на условный экстремум с наличием дополнительных ограничений.

Термин «стохастическое программирование» появился в начале 50-х годов, когда Данцигом, Чарнсом, Купером стали анализироваться задачи линейного программирования со случайными коэффициентами, возникающие при планировании в ситуациях с неопределенностью и риском. Примерно в эти же годы начало развиваться нелинейное программирование, и этим, по всей видимости, объясняется то, что в большинстве работ по стохастическому программированию авторы стремятся свести стохастические задачи к задачам нелинейного программирования и применить широко известные численные методы. Как станет ясно из дальнейшего, методы нелинейного программирования можно применить для решения только весьма узкого класса стохастических задач, поскольку они намного сложнее задач нелинейного программирования и требуют своих специфических методов.

Основная трудность в стохастическом программировании по сравнению с нелинейным программированием, как уже отмечалось, связана с отсутствием точной информации о функциях цели и ограничениях (не говоря уже о производных этих функций). Здесь нельзя обойтись детерминированными понятиями и кажется вполне естественным применять стохастические процедуры.

Известны стохастические процедуры двух типов: методы случайного поиска, изложенные в монографии Растригина [57], и методы стохастической аппроксимации.

В методах случайного поиска [57] существенно используется информация о точных значениях минимизируемых функций, поэтому они применимы только для задач нелинейного программирования.

Методом стохастической аппроксимации решается простейшая задача стохастического программирования, занимающая в общих постановках такое же место, как и классическая задача на безусловный экстремум в нелинейном программировании, — отсутствуют ограничения, функция цели имеет ограниченные вторые производные.

Рассмотренные в книге стохастические квазиградиентные методы в некотором смысле объединяют идеи указанных выше методов и позволяют решать как задачи нелинейного, так и стохастического программирования с наличием общих ограничений.

В гл. I приведен ряд характерных примеров задач стохастического программирования, на которых обсуждаются основные трудности их решения. В гл. II указаны случаи и характерные приемы сведения стохастических задач к обычным задачам нелинейного программирования.

Стохастические квазиградиентные методы излагаются в гл. III и V, причем в гл. III рассматривается случай выпуклых, но негладких функций, а в гл. V случай невыпуклых и негладких функций. Как было отмечено выше, эти методы имеют такую форму, которая позволяет применять их как при решении задач нелинейного программирования (без вычисления производных), что обсуждается в гл. III, так и в задачах стохастического программирования (гл. IV, V).

Книга возникла из цикла лекций, которые были прочитаны автором на IV Всесоюзной школе по методам оптимизации в г. Вяймела (1971 г.), что, несомненно, наложило отпечаток на характер изложения. Местами оно лишь фрагментарно намечает те результаты, которые могут быть получены. Следует также отметить, что автор не стремился охватить в равной степени всю проблематику стохастического программирования. Основное внимание в книге уделяется вопросам численного решения практически интересных задач, и все, что сюда не относится, представлено весьма эскизно. В частности, в книге мало внимания уделяется предпосылкам типа измеримости, существования математических ожиданий, дифференцируемости под знаком математического ожидания. Там, где это необходимо сделать, предполагается, что такие предпосылки имеют место.

Общее представление о книг в достаточной степени дает ее оглавление. Почти в каждой главе имеются дополнения и упражнения, поясняющие и расширяющие содержание этих глав. Ссылки на литературу частично делаются по ходу изложения, причем указываются только те работы, которые имеют непосредственное отношение к излагаемому материалу и широко доступны. В более концентрированной форме и с некоторыми добавлениями источники приводимых результатов имеются в библиографических указаниях, помещенных в конце книги.

В заключение я считаю приятным долгом поблагодарить Н. Н. Моисеева за инициативу написания этой книги, плодотворные дискуссии и постоянное внимание к моей работе, дирекцию Института кибернетики АН УССР — В. М. Глушкова, В. С. Михалевича за всемерное поощрение работ в области стохастического программирования. Я признателен редактору книги Ю. А. Флерову, а также Е. А. Нурминскому и другим сотрудникам Института кибернетики АН УССР, критика которых способствовала устранению погрешностей.

Ю. М. Ермольев

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Эта глава носит вспомогательный характер. В ней кратко, скорее даже конспективно, излагаются основные понятия теории вероятностей, которые существенно используются в постановках задач стохастического программирования, при их анализе и решении. Этот материал дан исключительно ради удобства чтения дальнейших глав, для того чтобы лица, в недостаточной степени владеющие основами теории вероятностей, могли при первом чтении не прибегать за разъяснениями к фундаментальным работам в этой области.

Обсуждаются также различные известные подходы к формализации процедур выбора решений в условиях риска и неопределенности, благодаря чему становится понятным значение и место моделей стохастического программирования. Рассматриваются примеры задач стохастического программирования и делается сравнение их с обычными задачами нелинейного программирования.

§ 1. Теоретико-вероятностные понятия

1. Модель случайностей. Теория вероятностей занимается вопросами анализа и количественной оценки таких интуитивных понятий, как случайность, неопределенность. Математическая модель случайностей, с которой имеет дело теория вероятностей, обычно строится следующим образом.

Начинают с *достоверного события* — некоторого множества Ω (пространства) *элементарных событий* ω, *вероятность* (*мера*) которого принимается равной 1. Элементарные события в каждом конкретном случае выбираются так, чтобы любое рассматриваемое случайное событие можно было отождествить с некоторой совокупностью элементарных событий. Например, если бросаются две игральные кости, а интересующие события — четное или нечетное число, выпавшее на первой кости, то в качестве Ω

естественно взять множество 1, 2, ..., 6; если же интересующие события — сумма чисел, выпавших на двух костях, то в качестве Ω можно взять множество всевозможных пар чисел (i, j), $i, j = 1, \ldots, 6$.

Кроме достоверного события Ω обычно имеется некоторая совокупность подмножеств Ω, вероятность (мера) которых $\mathsf{P}\{\cdot\}$ задана. Эти подмножества называются *измеримыми подмножествами* или *событиями*, причем часто класс событий образует *алгебру событий* или легко может быть превращен в нее. Это значит, что каждому событию A ставится в соответствие *противоположное событие* «не A», или отрицание A, обозначаемое $\bar{A}$; событиям A, B ставится в соответствие событие «A и B», или *пересечение* (*произведение*) *событий* A и B, обозначаемое через $A \cap B$ или AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B; событиям A, B ставится в соответствие событие «A или B», или *объединение событий* A, B, обозначаемое $A \cup B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно из событий A, B. Событие $A\bar{B}$ называется *разностью двух событий* A, B и обозначается $A \setminus B$. Оно происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B не происходит. Событие $\bar{\Omega}$ называется *невозможным* и обозначается символом $\varnothing$; события A, B, для которых $AB = \varnothing$, называются *несовместимыми*. Исходя из алгебры событий, вероятность затем стремятся однозначно продолжить на возможно широкую совокупность подмножеств Ω по правилам:

1) Если $A_1, A_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся измеримые подмножества (попарно несовместимые события) Ω, то их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ также измеримо и

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_k\}.$$

2) Если A измеримо, то также измеримо и его дополнение (противоположное событие) $\bar{A}$.

Например, если в качестве Ω рассматривать $[0, 1]$, а в качестве P — меру Лебега на $[0, 1]$, то обычно эту меру строят, отправляясь от класса всех интервалов (открытых, полуоткрытых и замкнутых), мера которых принимается равной их длине. Этот класс не образует алгебру, так как объединение двух интервалов не всегда есть интервал, но затем этот класс расширяется до алгебры конечных объединений непересекающихся интервалов.

В результате продолжения получается набор (класс) $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω, для которых определена однозначным образом мера (вероятность). Подмножества набора $\mathscr{A}$ также называются событиями или измеримыми множествами, класс событий $\mathscr{A}$ образует *σ-алгебру* (если $\Omega = R^n$, то *борелевское поле, класс борелевских множеств*): класс $\mathscr{A}$ содержит достоверное событие, невозможное событие и замкнут относительно операций перехода к противоположному событию, счетного объединения и счетного пересечения. Иначе говоря, если $A \in \mathscr{A}$, то $\bar{A} \in \mathscr{A}$; если $A_k \in \mathscr{A}$, $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}.$$

Пара $(\Omega, \mathscr{A})$, состоящая из достоверного события Ω и σ-алгебры $\mathscr{A}$ подмножеств Ω, называется *измеримым пространством*.

Тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$, состоящая из непустого множества Ω (множества элементарных событий), σ-алгебры $\mathscr{A}$ подмножеств (событий) Ω и вероятности P, определенной на $\mathscr{A}$, называется *вероятностным пространством*.

2. Случайные функции. Функция $\xi(\omega)$ называется *действительной случайной величиной* ($\mathscr{A}$-измеримой), если она принимает действительные значения и для каждого числа z неравенство $\xi(\omega) \leqslant z$ определяет измеримое подмножество в Ω, т. е. $\{\omega: \xi(\omega) \leqslant z\} \in \mathscr{A}$. В дальнейшем рассматриваются только действительные случайные величины.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство. Если функция $\xi(\omega)$, определенная на пространстве Ω, принимает значения из R^n, причем для всякого борелевского множества B из R^n множество $\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}$, то функция $\xi(\omega)$ называется *случайным вектором*. Случайный вектор $\xi(\omega)$ определяет некоторое отображение Ω в R^n и индуцирует вероятность в R^n. Более точно, пусть $\xi(\omega)$ — случайный вектор и пусть

$$\xi(A) = \{\xi(\omega): \omega \in A\}, \qquad \xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}.$$

Легко убедиться, что класс $\mathcal{B}=\{B\colon \xi^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$ представляет собой σ-алгебру подмножеств R^n, называемую *σ-алгеброй, индуцированной случайным вектором* $\xi(\omega)$. Для всякой вероятности P на $(\Omega, \mathcal{A})$ формула $\mu(B)=\mathsf{P}\{\xi^{-1}(B)\}$ определяет вероятность на $(R^n, \mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный класс подмножеств Ω. Наименьшая содержащая этот класс σ-алгебра (равная пересечению всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{F}$) называется *σ-алгеброй, порожденной* $\mathcal{F}$. Если для пары σ-алгебр $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ выполняется включение $\mathcal{D}\supseteq\mathcal{E}$, то σ-алгебра $\mathcal{E}$ называется σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathcal{D}$. Для всякого семейства $\{\xi(i, \omega),\ i\in I\}$ случайных n_i-мерных векторов через $\mathcal{B}(\xi(i, \omega),\ i\in I)$ обозначим σ-подалгебру $\mathcal{A}$, порожденную семействами $\xi^{-1}(i, B)$.

Математическое ожидание случайной величины $\xi(\omega)$ обозначается через $\mathsf{M}\xi$ либо $\mathsf{M}(\xi)$. По определению

$$\mathsf{M}\xi=\int\xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)=\int\xi\,d\mathsf{P},$$

причем интеграл здесь понимается как интеграл Лебега.

Если ввести *функцию распределения* $H(z)$ величины $\xi(\omega)$, т. е. $H(z)=\mathsf{P}\{\xi<z\}$, то

$$\mathsf{M}\xi=\int_{-\infty}^{\infty} z\,dH(z).$$

В тех случаях, когда $dH(z)=h(z)\,dz$, где $h(z)$ — *плотность распределения*, то

$$\mathsf{M}\xi=\int_{-\infty}^{\infty} zh(z)\,dz.$$

Если имеются величины $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, то функция $H(z_1, \ldots, z_r)=\mathsf{P}\{\xi_1<z_1, \ldots, \xi_r<z_r\}$ называется *совместной функцией распределения* величин $\xi_1, \ldots, \xi_r$.

3. Сходимость. Последовательность случайных векторов $\xi^s(\omega)$, $s=1, 2, \ldots$, сходится к случайному вектору $\xi(\omega)$

а) *почти наверное* (*с вероятностью* 1) и обозначается $\xi^s\to\xi$ п. н., если $\lim\limits_{s\to\infty}\xi^s(\omega)=\xi(\omega)$ для почти всех ω по мере P;

б) *по вероятности* и обозначается $\xi = \mathsf{P} - \lim \xi^s$, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \mathsf{P}\{\|\xi^s - \xi\| > \varepsilon\} = 0;$$

в) *в среднем квадратичном* и обозначается $\xi^s \to \xi$ с. к., если

$$\lim_{s\to\infty} \mathsf{M}\|\xi^s - \xi\|^2 = 0.$$

Имеет место следующая сравнительная таблица сходимостей:

$$\text{сходимость п. н.} \Longrightarrow \begin{matrix}\text{сходимость}\\ \text{по вероятности}\end{matrix} \Longleftarrow \text{сходимость в с. к.}$$

Условимся в дальнейшем в общем члене последовательности векторов индекс s ставить сверху, а в последовательности чисел — снизу, т. е. $\{a^s\}$ — последовательность векторов, $\{a_s\}$ — последовательность чисел.

Особенности сходимости с вероятностью 1, по вероятности, в среднем квадратичном можно понять из следующего примера.

Пусть $\Omega = [0, 1]$; $\mathcal{A}$ — класс борелевских подмножеств Ω, т. е. σ-алгебра, порожденная классом всех интервалов; P — мера Лебега на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Пусть случайная величина $\xi(\omega) \equiv 0$, а последовательность $\xi_s(\omega)$, $s = 1, 2, \ldots$, построена следующим образом. Величина $\xi_1(\omega) \equiv 1$. Для определения $\xi_2(\omega)$, $\xi_3(\omega)$ интервал $[0,1]$ делится на две равные части и принимается

$$\xi_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{2} < \omega \leqslant 1, \end{cases} \qquad \xi_3(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant \omega \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant \omega < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Затем $[0, 1]$ делится на четыре части и определяются ξ_4, ξ_5, ξ_6, ξ_7, которые равны 1 каждая соответственно на одном из интервалов $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leqslant \omega \leqslant \frac{2}{4}$, $\frac{2}{4} \leqslant \omega \leqslant \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \leqslant \omega \leqslant 1$ и равны 0 во всех остальных случаях. Затем $[0, 1]$ делится на 8 равных частей и аналогичным образом определяются ξ_8, ξ_9, $\ldots$, ξ_{15} и т. д. В общем случае представим каждое $s = 1, 2, \ldots$ в виде $s = 2^k + m$, где $0 \leqslant m < 2^k$.

Положим

$$\xi_s = \begin{cases} 1, \text{ если } \frac{m}{2^k} \leqslant \omega \leqslant \frac{m+1}{2^k}, \\ 0 \text{ для остальных } \omega. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_0^1 (\xi_s - \xi)^2 \, d\omega = \int\limits_{(m+1)/2^k}^{m/2^k} d\omega = 2^{-k} \to 0$ при $s \to \infty$, т. е. $\xi_s \to \xi$ с. к. Однако $\lim\limits_{s\to\infty} \xi_s(\omega)$ не существует ни для какого $\omega \in [0, 1]$, так как при фиксированном ω в последовательности $\xi_s(\omega)$ при $s \to \infty$ встречаются как 0, так и 1. Тем не менее $\xi = \mathsf{P} - \lim \xi_s$, так как для любого положительного ε имеем

$$\mathsf{P}\{\omega: |\xi_s(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2^{-k} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Следующие известные [6], [43], [55] утверждения бывают полезны в тех случаях, когда требуется перейти к пределу под знаком математического ожидания.

Лемма Фату. *Если случайные величины ξ_s неотрицательны, то*

$$\mathsf{M} \varliminf_{s\to\infty} \xi_s \leqslant \varliminf_{s\to\infty} \mathsf{M}\xi_s.$$

Теорема Лебега. *Если*

$$\xi_s \to \xi \textit{ п. н.}, \quad |\xi_s| < \eta,$$

где η — некоторая случайная величина с конечным математическим ожиданием, то

$$\mathsf{M}\xi = \lim_{s\to\infty} \mathsf{M}\xi_s.$$

Лемма 1. *Пусть $\xi_s \to \xi$ по вероятности, $\sup\limits_s \mathsf{M}\xi_s^2 < \infty$. Тогда* $\mathsf{M}\xi = \lim\limits_{s\to\infty} \mathsf{M}\xi_s$.

Полезным бывает также следующее неравенство:

Неравенство Чебышева. *Если g — произвольное положительное число, то для случайной величины $\xi \geqslant 0$*

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant g\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi^2}{g^2}.$$

4. Условные математические ожидания. Пусть A, B — некоторые события вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, т. е. $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, причем $\mathsf{P}\{B\} \neq 0$. Тогда соотношение

$$\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}\{A/B\} = \frac{\mathsf{P}\{AB\}}{\mathsf{P}\{B\}}$$

определяет *условную вероятность события A при данном B*. Функция $\mathsf{P}_B(\cdot)$, определенная на σ-алгебре событий $\mathcal{A}$, удовлетворяет, очевидно, соотношениям

$$\mathsf{P}_B(\Omega) = 1, \ \mathsf{P}_B(A) \geqslant 0, \ \mathsf{P}_B\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mathsf{P}_B(A_k),$$

где события A_k попарно несовместимы. $\mathsf{P}_B(\cdot)$ называется *условной вероятностью при данном B*. Таким образом, наряду с пространством $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}_B)$. Математическое ожидание (если оно существует) случайной величины ξ в этом новом вероятностном пространстве называется *условным математическим ожиданием* при данном B и обозначается

$$\mathsf{M}(\xi/B) = \int \xi(\omega)\, \mathsf{P}_B(d\omega).$$

Легко проверить, что

$$\mathsf{M}(\xi/B) = \frac{1}{\mathsf{P}\{B\}} \int_B \xi(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega)$$

или

$$\mathsf{M}(\xi/B)\, \mathsf{P}\{B\} = \int_B \xi(\omega)\, \mathsf{P}(d\omega). \qquad (1.1)$$

Понятий условной вероятности и условного математического ожидания относительно фиксированного события недостаточно для приложений, поэтому вводятся более общие понятия условных вероятностей и математических ожиданий относительно случайных величин, семейств случайных величин, σ-алгебр событий.

Пусть даны множество $A \in \mathcal{A}$ и некоторая σ-алгебра $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ (т. е. σ-подалгебра $\mathcal{A}$), содержащая счетную систему попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$, $\mathsf{P}\{B_k\} \neq 0$. Тогда

$$\mathsf{P}\{A/B_k\} = \frac{\mathsf{P}\{AB_k\}}{\mathsf{P}\{B_k\}}.$$

Условная вероятность $\mathsf{P}(A/B_k)$ при фиксированном A зависит от B_k и является случайной величиной, принимающей постоянное значение на множествах B_1, B_2, ... Обозначим ее через $\mathsf{P}\{A/\mathscr{B}\}$ или $\mathsf{P}_{\mathscr{B}}\{A\}$.

При каждом фиксированном ω совершается одно из событий B_k (так как B_1, B_2, ... попарно не пересекаются и $\bigcup_k B_k = \Omega$), и если фиксировано также A, то величина $\mathsf{P}\{A/\mathscr{B}\}$ примет определенное значение. Если теперь при данном ω рассмотреть функцию множеств $\mathsf{P}_{\mathscr{B}}(\cdot)$, то она является вероятностной мерой на $\mathscr{A}$. Поэтому естественно определить условное математическое ожидание ξ относительно $\mathscr{B}$ равенством

$$\mathsf{M}(\xi/\mathscr{B}) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathsf{P}\{d\omega/\mathscr{B}\}.$$

Величина $\mathsf{M}(\xi/\mathscr{B})$ принимает постоянные значения на множествах B_1, B_2, ..., что означает, что она измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$. При каждом B_k имеет место (в соответствии с (1.1))

$$\mathsf{M}(\xi/B_k)\,\mathsf{P}(B_k) = \int_{B_k} \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega);$$

поэтому для произвольного множества $B \in \mathscr{B}$, которое может быть представлено объединением конечного или счетного числа множеств B_k, получим соотношение

$$\int_B \mathsf{M}(\xi/\mathscr{B})\,\mathsf{P}(d\omega) = \int_B \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega).$$

Это соотношение является основополагающим для определения условного математического ожидания в общем случае.

Пусть имеется некоторая σ-подалгебра $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{A}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$. Тогда *условное математическое ожидание* $\mathsf{M}(\xi/\mathscr{B})$ случайной величины ξ при данной σ-алгебре $\mathscr{B}$ есть $\mathscr{B}$-измеримая функция, определенная соотношением

$$\int_B \mathsf{M}(\xi/\mathscr{B})\,\mathsf{P}(d\omega) = \int_B \xi(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega).$$

Условной вероятностью $\mathsf{P}\{A/\mathscr{B}\}$ *события* $A \in \mathscr{A}$ *относительно* $\mathscr{B}$ называется случайная величина $\mathsf{M}(\chi_A/\mathscr{B})$, где $\chi_A(\omega)$ — характеристическая функция множества A, т. е. $\chi_A(\omega)=0$ при $\omega\,\overline{\in}\,A$ и $\chi_A(\omega)=1$ при $\omega\in A$. Легко убедиться, что $\mathsf{M}\mathsf{M}(\xi/\mathcal{B})=\mathsf{M}\xi$; если $\mathcal{B}=\mathcal{A}$ или $\xi(\omega)$ является $\mathcal{A}$-измеримой, то $\mathsf{M}(\xi/\mathcal{A})=\xi$.

Пусть теперь $\eta(\omega)=(\eta_1(\omega),\ \ldots,\ \eta_r(\omega))$ — случайный вектор. Условное математическое ожидание $\mathsf{M}(\xi/\eta)$ величины ξ относительно η определяется следующим образом. Обозначим через $\mathcal{D}$ борелевские множества пространства R^n и рассмотрим события $\{\omega\colon\ \eta(\omega)\in\mathcal{D}\}$. Совокупность этих событий образует σ-подалгебру $\mathcal{B}_\eta$ исходной σ-алгебры $\mathcal{A}$, и полагают

$$\mathsf{M}(\xi/\eta)=\mathsf{M}(\xi/\mathcal{B}_\eta).$$

Можно показать (см., например, [6]), что при этом $\mathsf{M}(\xi/\eta)$ есть измеримая функция от η, т. е. значения $\mathsf{M}(\xi/\eta)$ определяются значением η.

5. М а р т и н г а л ы. При рассмотрении вопросов сходимости последовательностей случайных величин важным является понятие субмартингала и супермартингала. Это — своеобразные стохастические аналоги неубывающих и невозрастающих последовательностей действительных чисел. Пусть $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ — вероятностное пространство; $\xi_s(\omega)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,$ — последовательность случайных величин; $\mathsf{M}|\xi_s|<\infty$.

Последовательность $\xi_s(\omega)$, $s=0,\ 1,\ \ldots,$ называется

1) *супермартингалом*, если

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}/\xi_0,\ \ldots,\ \xi_s)\leqslant\xi_s,\quad s=0,1,\ \ldots;$$

2) *мартингалом*, если

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}/\xi_0,\ \ldots,\ \xi_s)=\xi_s,\quad s=0,1,\ \ldots;$$

3) *субмартингалом*, если последовательность $-\xi_s$, $s=0,1,\ \ldots,$ является супермартингалом.

П р и м е р. Пусть $\xi_s=\sum\limits_{k=0}^{s}\beta_k$, $s=0,\ 1,\ldots$ Если $\mathsf{M}(\beta_k/\beta_0,\ \ldots$ $\ldots,\ \beta_{k-1})=0$ при $k>0$, т. е. величины β_k центрированные, то

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}/\xi_0,\ \ldots,\ \xi_s)=\mathsf{M}(\xi_s+\beta_{s+1}/\xi_0,\ \ldots,\ \xi_s)=\xi_s$$

т. е. последовательность ξ_s образует мартингал.

Иногда полезными являются более общие определения. Пусть $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, ... — неубывающая последовательность

σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A}_s \subseteq \mathscr{A}_{s+1}$. Последовательность ξ_s, $s=0, 1, \ldots$, называется *адаптированной к семейству* $\mathscr{A}_s$, если при каждом $s=0, 1, \ldots$ величины ξ_s являются $\mathscr{A}_s$-измеримыми.

Пусть последовательность ξ_s, $s=0, 1, \ldots$, адаптирована к семейству $\mathscr{A}_s$, $s=0, 1, \ldots$, и такова, что $\mathsf{M}|\xi_s|<\infty$. Тогда эта последовательность называется

1) супермартингалом (относительно $\mathscr{A}_s$, $s=0, 1, \ldots$), если

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}/\mathscr{A}_s) \leqslant \xi_s, \quad s=0, 1, \ldots;$$

2) мартингалом, если

$$\mathsf{M}(\xi_{s+1}/\mathscr{A}_s) = \xi_s, \quad s=0, 1, \ldots;$$

3) субмартингалом, если $-\xi_s$, $s=0, 1, \ldots$, является супермартингалом.

Отметим, что из определения супермартингала следует, что

$$\mathsf{M}\xi_{s+1} \leqslant \mathsf{M}\xi_s \leqslant \ldots \leqslant \mathsf{M}\xi_0,$$

а из определения мартингала, что

$$\mathsf{M}\xi_{s+1} = \mathsf{M}\xi_s = \ldots = \mathsf{M}\xi_0.$$

Теорема 1. *Если* $\{\xi_s, \mathscr{A}_s, s=0, 1, \ldots\}$ — *супермартингал, то для существования с вероятностью* 1 *конечного предела* ξ_s $\left(\left|\lim\limits_{s\to\infty} \xi_s\right| < \infty\right)$ *достаточно, чтобы*

$$\inf_s \mathsf{M}\xi_s^- > -\infty, \qquad \xi_s^- = \min\{0, \xi_s\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если ξ_s, $s=0, 1, \ldots$, — неотрицательный супермартингал, то с вероятностью 1 существует предел ξ_s. В том случае, когда ξ_s — мартингал, условие $\inf\limits_s \mathsf{M}\xi_s^- > -\infty$ заменяется условием $\sup\limits_s \mathsf{M}|\xi_s| < \infty$. Если мартингал $\xi_s = \sum\limits_{k=0}^{s} \beta_k$, где β_k — центрированные случайные величины, то

$$\mathsf{M}|\xi_s^2| \leqslant \mathsf{M}\xi_s^2 = \sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\beta_k^2;$$

поэтому справедливо следующее утверждение:

Следствие. *Если* $\sum_{k=0}^{\infty} M\beta_k^2 < \infty$, *то ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ *сходится почти всюду.*

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующего *неравенства Дуба*:

Лемма 2. *Пусть* $r(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$, — *конечные числа,* $h(T)$ — *число переходов в последовательности* $r(0), \ldots, r(T)$ *от значений, лежащих слева, к значениям, лежащим справа от интервала* $[a, b]$, *называемое числом пересечений* $[a, b]$ *снизу вверх. Тогда*

$$(b-a)\,h(T) \leqslant (a - r(T))^{+} + \sum_{t=0}^{T-1} I(t)\,(r(t+1) - r(t)),$$

где $I(t)$ *принимает значения* 0 *или* 1, *причем значение* $I(t)$ *полностью определяется по величинам* $r(0), \ldots, r(t)$.

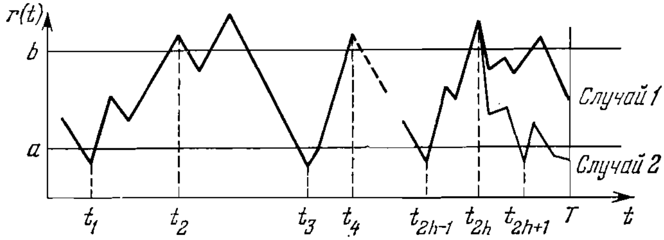

Рис. 1.

h ?

Доказательство. Пусть t_1 — первый момент времени, когда $r(t)$ принимает значение, меньшее a, t_2 — первый после t_1 момент, когда $r(t) > b$, t_3 — первый после t_2 момент, когда $r(t) < a$, и т. д. Тогда на отрезке времени $[t_{2h}, T]$ последовательность $r(t)$ уже ни разу не пересечет $[a, b]$ снизу вверх, причем, как легко видеть (рис. 1),

$$(b-a)\,h(T) \leqslant \sum_{i=1}^{h} (r(t_{2i}) - r(t_{2i-1})).$$

Это можно записать и так:

$$(b-a)\,h(T) \leqslant \sum_{t=0}^{t_{2h}} I(t)\,(r(t+1) - r(t)),$$

если определить функцию $I(t)$ так, чтобы она принимала значение 1 в интервалах $[t_1, t_2]$, $[t_3, t_4]$, ..., $[t_{2h-1}, t_{2h}]$ и значение 0 во всех остальных точках интервала $[0, t_{2h}]$.

Очевидно, что функция $I(t)$ меняет значение с 0 на 1 и наоборот только в точках t_k и ее значение $I(t)$ в фиксированный момент времени t $(t=0, 1, 2, \ldots, t_{2h})$ полностью определяется величинами $r(0), \ldots, r(t)$. Определим $I(t)$ на интервале (t_{2h}, T) следующим образом:

1) значение $I(t)=0$ до тех пор, пока последовательность не принимает значения, меньшего a;

2) если найдется впервые после t_{2h} момент времени t_{2h+1} такой, что $r(t_{2h+1})<a$, то $I(t)=1$ при $t\in[t_{2h+1}, T]$. Следовательно, если момента t_{2h+1} не существует, то предыдущее неравенство можно записать еще так:

$$(b-a)\,h(T)\leqslant\sum_{t=0}^{T-1} I(t)\,(r(t+1)-r(t)),$$

а если t_{2h+1} существует, то $\sum_{t=0}^{T-1} I(t)\,(r(t+1)-r(t))$ отличается от $\sum_{t=0}^{t_{2h}} I(t)\,(r(t+1)-r(t))$ на величину $r(T)-r(t_{2h+1})$. Если $r(T)-r(t_{2h+1})\geqslant 0$, то предыдущее неравенство сохраняется, поэтому в общем случае

$$(b-a)\,h(T)\leqslant\sum_{t=0}^{T-1} I(t)\,(r(t+1)-r(t))+(r(t_{2h+1})-r(T))^{+},$$

где $(x)^{+}=\max\{x, 0\}$.

Учитывая, наконец, что $r(t_{2h+1})<a$, отсюда получим нужное неравенство Дуба.

Покажем, как используется это неравенство при доказательстве теорем о сходимости супермартингалов. Докажем следующее, более общее, чем теорема 1, утверждение, которое потребуется в дальнейшем:

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\eta_s(\omega)$, $s=0, 1, \ldots$, *адаптирована к семейству* $\mathcal{A}_s$, $s=0, 1, \ldots$, $\inf\limits_s \mathsf{M}\eta_s^{-}>-\infty$,

$$\mathsf{M}(\eta_{s+1}/\mathcal{A}_s)\leqslant\eta_s+W_s,$$

где величина $W_s \geqslant 0$ *измерима относительно* $\mathcal{A}_s$ *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M} W_s < \infty.$$

?

Тогда с вероятностью 1 *существует конечный предел* η_s $(|\lim\limits_{s\to\infty} \eta_s| < \infty)$ *при* $s \to \infty$.

Доказательство. Поставим в соответствие случайным величинам $\eta_0(\omega), \eta_1(\omega), \ldots, \eta_k(\omega)$ случайную величину $h(k, \omega)$ и случайные величины $I(k, \omega)$, которые для краткости будем обозначать через $h(k)$, $I(k)$. Тогда для любого ω справедливо неравенство

$$(b-a)\, h(k) \leqslant (a-\eta_k)^+ + \sum_{s=0}^{k-1} I(s)\,(\eta_{s+1}-\eta_s).$$

Величины $h(k)$, $I(k)$ определяются значениями $\eta_0, \ldots$ $\ldots, \eta_k$, поэтому, беря математическое ожидание от левой и правой части этого неравенства, с учетом свойств условного математического ожидания получим

$$(b-a)\ \mathsf{M} h(k) \leqslant \mathsf{M}(a-\eta_k)^+ + \sum_{s=0}^{k-1} \mathsf{M}\mathsf{M}(I(s)(\eta_{s+1}-\eta_s)/A_s) =$$

$$= \mathsf{M}(a-\eta_k)^+ + \sum_{s=0}^{k-1} \mathsf{M} I(s)\,(\mathsf{M}(\eta_{s+1}/\mathcal{A}_s) - \eta_s).$$

С учетом основного свойства η_s отсюда получаем

$$(b-a)\,\mathsf{M} h(k) \leqslant \mathsf{M}(a-\eta_k)^+ + \sum_{s=0}^{k-1} \mathsf{M} W_s. \tag{1.2}$$

Полученное неравенство для среднего числа пересечений снизу вверх интервала $[a, b]$ величинами $\eta_0, \ldots, \eta_k$ является решающим для доказательства теоремы.

Пусть последовательность $\eta_0(\omega), \eta_1(\omega), \ldots$ не сходится почти при каждом ω (с вероятностью 1). Тогда найдутся такие числа $a < b$, что множество

$$A_{a,b} = \{\omega: \varliminf_{s\to\infty} \eta_s(\omega) < a < b < \varlimsup_{s\to\infty} \eta_s(\omega)\}$$

не сущ. предел (кон. или бескон.)

не пусто, т. е. $\mathsf{P}\{A_{a,b}\} \neq 0$. Покажем, что этого не может быть, т. е. что $\mathsf{P}\{A_{a,b}\} = 0$.

Последовательность $h(1)$, $h(2)$, ... не убывает и стремится к ∞ при $\omega \in A_{a,b}$. Пусть $h = \lim\limits_{s \to \infty} h(s)$. Тогда $\mathsf{P}\{A_{a,b}\} = 0$, если $\mathsf{P}\{h = \infty\} = 0$. Последнее будет иметь место в том случае, если $\mathsf{M}h < \infty$. Оценим $\mathsf{M}h$.

Применяя лемму Фату и неравенство (1.2), получим (с учетом монотонности последовательности $h(s)$)

$$\mathsf{M} \lim_{s \to \infty} h(s) = \mathsf{M}h = \lim_{s \to \infty} \mathsf{M}h(s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\left(\sup_s \mathsf{M}\,(a - \eta_s)^+ + \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}W_s\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(-\inf_s \mathsf{M}\,(\eta_s - a)^- + \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}W_s\right).$$

Так как по условиям теоремы $\inf\limits_s \mathsf{M}\eta_s^- > -\infty$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}W_s < \infty$, то из последнего неравенства следует, что $\mathsf{M}h < \infty$ и, следовательно, $\mathsf{P}\{A_{a,b}\} = 0$.

Так как всегда можно предполагать, что a, b — рациональные числа, и так как множество всех ω, где имеет место расходимость последовательности η_s, т. е. $\left\{\omega\colon \varliminf\limits_{s \to \infty} \eta_s < \varlimsup\limits_{s \to \infty} \eta_s\right\}$, может быть представлено как $\bigcup\limits_{a,b} A_{a,b}$, где a и b пробегают счетное множество всех рациональных чисел, то отсюда следует и утверждение теоремы.

§ 2. Выбор решений в условиях риска и неопределенности

1. Общие замечания. Существуют различные подходы к проблеме выбора решений в условиях риска и неопределенности, каждый из которых имеет свои положительные и отрицательные стороны. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы на самых простых примерах проиллюстрировать это разнообразие подходов и отметить их недостатки.

Согласно принятой классификации [44] задачи выбора решений обычно различаются тем, принимает решение индивидуум (*индивидуальное решение*) или группа (*групповое решение*), и тем, производится выбор при *определенности*, при *риске* или при *неопределенности*. При этом индивидуумом считается человек или организация, имеющая единый интерес, служащий мотивом ее решения. Всякое собрание таких индивидуумов, противоречия между которыми разрешаются либо открытым конфликтом, либо компромиссом, рассматривается как группа. В дальнейшем в основном будут рассматриваться только задачи выбора индивидуальных решений.

Говорят, что имеет место

1) *выбор решений при определенности*, если каждое действие неизменно приводит к однозначному исходу;

2) *выбор решений при риске*, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, каждый из которых имеет известную вероятность появления;

3) *выбор решений при неопределенности*, если каждое действие приводит к одному из множества частных исходов, вероятности которых неизвестны или даже не имеют смысла.

2. Задачи выбора. Выбор решения при определенности сводится к следующему: дано множество *допустимых действий* (*допустимых решений*), требуется в этом множестве выбрать такое действие (решение), которое дает минимум (или максимум) некоторого показателя, называемого *функцией цели*.

Примерами нетривиальных задач выбора решений при определенности, потребовавших развития новых разделов математики, являются задачи линейного программирования, более сложными примерами — задачи нелинейного программирования.

Сущность задач выбора действия или решений при риске и неопределенности можно пояснить на следующем простом примере.

Пусть имеется множество действий или решений $i = 1, 2, \ldots, m$ и возможных исходов, однозначно определяемых состояниями природы $j = 1, 2, \ldots, n$, и пусть f_{ij} — *затраты* (*убыток*, *потери*), связанные с действием i при *исходе* (*состоянии природы*) j. В данном случае f_{ij} есть функция цели. Числа f_{ij} можно представить в виде матрицы $m \times n$.

Истинное состояние природы j неизвестно. Требуется найти такое действие i (т. е. выбрать такую строку матрицы $\{f_{ij}\}$), которое в некотором смысле лучше других. Если известны вероятности $p_1, \ldots, p_n$ состояний $j=1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, то имеет место задача выбора решений при риске. При этом часто выбирается действие $i=1, \ldots, m$, которое минимизирует *средние затраты* $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}p_j$. Это — простейшая задача *стохастического программирования*. Насколько удачным показателем являются средние затраты, зависит от конкретных обстоятельств. Например, если есть два действия и два исхода с затратами, представленными матрицей табл. 1, в нижней строке которой указаны

Таблица 1

$i \backslash j$	1	2
1	1000000	10
2	10000000	1
p_j	0,000001	0,999999

вероятности исходов, то желание минимизировать средний убыток приводит к выбору действия 1. Преимущество этого действия связано с пребыванием природы в маловероятном состоянии 1. Если же учесть то, что природа практически будет находиться в состоянии 2, в котором затраты действия 1 больше затрат действия 2, то более разумным кажется выбор действия 2. Такой выбор можно обосновать, если вместо минимизации средних затрат минимизировать вероятность

$$\mathsf{P}(i) = \mathsf{P}\{j \,/\, f_{ij} \geq f\},$$

где f — некоторый уровень затрат, например $f=3$. Однако заметим, что если $f=1$, то и этот критерий приводит к выбору первого действия.

Менее тривиальным примером выбора решения при риске является следующая задача стохастического программирования, связанная с планированием запасов.

Простейшая задача складирования. Имеется пункт (склад) вместимостью a единиц, где требуется создать запас некоторого продукта. К моменту планирования нет точной информации о потребностях в этом продукте, но есть основание считать величину спроса β случайной с функцией распределения $H(z)=\mathrm{P}\{\beta<z\}$. Пусть размер запаса составляет x единиц. Тогда количество продукта, которое будет отпущено со склада при условии, что его запас x, а спрос β, равно меньшему из двух чисел x и β. Поэтому ожидаемое потребление равно

$$\int_0^x z\,dH(z)+x\int_x^\infty dH(z).$$

Пусть доход от реализации единицы продукта составляет c единиц. Тогда ожидаемый доход при запасе x единиц равен

$$F(x)=c\left[\int_0^x z\,dH(z)+x\int_x^\infty dH(z)\right]= \\ =c\left[\int_0^x z\,dH(z)+x(1-H(x))\right].$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такое $x\geqslant 0$, которое максимизирует функцию $F(x)$.

Мы видим, что определение значения функции цели (дохода) в простейшей стохастической задаче планирования запаса связано с вычислением интеграла, который в конечном виде берется только в редких случаях. Когда же планируются запасы неоднородных продуктов, появляются (см. § 4) многократные интегралы, что еще более усложняет задачу вычисления функции цели. Кроме того, функция $F(x)$ рассмотренного выше примера может оказаться негладкой, что зависит от функции распределения $H(z)$.

Рассмотрим теперь некоторые критерии, которые были предложены для решения задач о выборе решения при неопределенности, причем для простоты остановимся пока только на задаче с конечным числом действий $i=1, \ldots, m$, состояниями природы $j=1, \ldots, n$ и матрицей затрат (потерь) f_{ij}. Более общие задачи рассматриваются в дальнейшем.

3. Минимаксный критерий. Согласно этому принципу (критерию) принимающий решение пытается свести к минимуму максимальный убыток, который он терпит от того, что совершает некоторое действие. То есть каждое действие i оценивается числом (гарантированным уровнем)

$$f(i) = \max_j f_{ij}$$

и «оптимальным» считается то действие, которому отвечает наименьшее из чисел $f(i)$. Пример, представленный табл. 2, показывает, какие возражения обычно выдвигаются против минимаксного принципа.

Таблица 2

$i \backslash j$	1	2
1	0	1
2	0,9	0,9

Здесь согласно минимаксному принципу действие 2 оказывается предпочтительнее, чем 1. Между тем очевидно, что действие 2 разумно только в том случае, когда состояния $j=1, \ldots, n$ контролируются сознательным противником, который может быть полностью осведомлен о действиях принимающего решение и матрице убытков и обязательно выберет $j=2$.

4. Критерий Сэвиджа. Этот критерий называют еще критерием *минимаксного риска*. Для каждого состояния природы j отыскивается $\min_i f_{ij}$. В предыдущем примере $\min_i f_{i1}=0$, $\min_i f_{i2}=0{,}9$. Условимся риском называть разность $f_{ij}-\min_i f_{ij}$. Поэтому, если природа находится в состоянии $j=1$, то при выборе действия $i=1$ нет риска, но есть риск при выборе $i=2$, равный 0,9; если истинное состояние природы $j=2$, то нет риска при выборе действия $i=2$ и есть риск, равный $1-0{,}9$, при выборе действия $i=1$.

В соответствии с этим будем рассматривать матрицу, представленную табл. 3, и выбирать то действие, которое минимизирует наихудшее, что может предложить природа при данной матрице убытков. То есть будем минимизировать $\max_{j}\left|f_{ij}-\min_{i} f_{ij}\right|$. Согласно критерию Сэвиджа будет выбрано действие 1.

Серьезные возражения против рассмотренных двух последних принципов, а также некоторых других, основанных на оценке каждого действия некоторым гарантированным уровнем, сводятся к тому, что в примере, заданном табл. 4, с точки зрения этих принципов оба действия одинаковы.

Таблица 3

$i \backslash j$	1	2
1	0	0,1
2	0,9	0

5. Оптимальность по Парето. Действие (решение) i называется *оптимальным по Парето*, если не существует $k \neq i$ такого, что

$$f_{kj} \leqslant f_{ij}$$

для каждого состояния $j = 1, \ldots, n$*). В последнем примере оба действия также оптимальны и по Парето.

Таблица 4

$i \backslash j$	1	2	9	..	j	...	n
1	0	1	1	...	1	...	1
2	1	0	0	...	0	...	0

6. Принцип недостаточного основания. Априорные распределения. Этот принцип впервые сформулирован Якобом Бернулли (1654—1705) и состоит в том, что если нет основания считать одно из состояний j более вероятным, чем любое другое, то их следует считать равновероятными и сводить задачу к выбору решения при риске. В частности, в указанном выше примере данный принцип, если минимизировать средний убыток, приводит к выбору действия 2.

*) Предполагается, что $(f_{k1}, \ldots, f_{kn}) \neq (f_{i1}, \ldots, f_{in})$.

Имеются возражения и против этого критерия, например, этот критерий, как и два предыдущих, основан на полном незнании истинного состояния природы, а на практике принимающий решение, как правило, имеет некоторую информацию о нем. Можно ли в этом случае на состояниях природы задать априорное распределение вероятностей, отличное от равномерного? Это интересный вопрос, решение которого упирается в философские понятия теории вероятностей, в понятие субъективной вероятности, и его обсуждение потребовало бы большого отступления. Поэтому отметим только, что такие принципы существуют и основаны на процедурах опроса экспертов и обработке их результатов.

Например, в PERT для оценки распределений сроков выполнения работы экспертам предлагается указать три оценки: оптимистическую, пессимистическую, и наиболее вероятную, на основе чего (с помощью статистической обработки) затем строится искомое распределение. Очевидно, что такой метод оценки меры неопределенности какого-либо параметра может применяться во многих случаях.

7. Комбинированные критерии. Комбинированные критерии применяются тогда, когда для одних неопределенных параметров имеет смысл задать распределение вероятностей, а для других — применить какой-либо другой критерий, например минимаксный. Такие постановки задач обсуждаются в гл. IV, V. С математической точки зрения комбинированные критерии приводят к сложным стохастическим экстремальным задачам.

Из сказанного видно, насколько разнообразными могут быть подходы к выбору решений в условиях неопределенностей и что здесь невозможно предложить какой-либо универсальный, единый критерий и подход. Какие критерии следует принять, зависит от конкретной обстановки. Например, если речь идет о погодных условиях при планировании сельскохозяйственной продукции, то здесь вряд ли оправданы минимаксные критерии; если же планируется вооружение и речь идет о количестве, скажем, ракет предполагаемого противника и прогнозе направлений его «удара», то при определении направлений удара можно исходить из худшего случая (минимаксный критерий), а число ракет характеризовать распределением вероятностей.

§ 3. Нелинейное и стохастическое программирование

1. Общие замечания. Оперативное и перспективное стохастическое программирование. Проведем на чисто описательном уровне параллель между задачами нелинейного и стохастического программирования.

Обычные задачи нелинейного программирования возникают в том случае, когда каждое допустимое действие (решение) можно однозначно охарактеризовать конечным набором чисел $x=(x_1, \ldots, x_n)$, каждому x поставить в соответствие однозначные числовые показатели $f^\nu(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, и искомое решение выбирать из условия минимума функции

$$f^0(x) \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$f^i(x) \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

$$x \in X, \tag{1.5}$$

где X — некоторое множество n-мерного пространства R^n, отвечающее обычно ограничениям специального вида, например:

$$X=\{(x_1, \ldots, x_n): x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

Экстремальная задача (1.3) — (1.5) — общая задача нелинейного программирования.

Точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая ограничениям (1.4) — (1.5), называется *допустимой точкой* (*допустимым решением, планом*). Множество всех допустимых точек образует *допустимое множество* (*допустимую область*), которое обычно обозначается через D. Функция $f^0(x)$ называется *функцией цели*, а $f^i(x)$ — *функциями ограничений*. Допустимая точка (допустимое решение), минимизирующая функцию цели, называется *оптимальной точкой, точкой экстремума, оптимальным решением* или просто *решением*.

Теория нелинейного программирования строится в предположении, что функции $f^\nu(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, — однозначные, что имеется возможность вычислять точные значения этих функций, их производных, а также установить принадлежность решения x множеству X.

Задачи стохастического программирования возникают тогда, когда каждое действие приводит к неоднозначному исходу и с каждым решением x можно связать числовые параметры $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, зависящие от решения x и «состояния природы» θ. В стохастическом программировании предполагается, что θ является элементарным событием некоторого вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Это пространство может зависеть от x и называется *пространством состояний* (природы) или *пространством* (случайных) *параметров*. В дальнейшем, если это особо не оговаривается, предполагается, что $(\Theta, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ не зависит от x, хотя для прямых методов, рассматриваемых в гл. IV, это предположение несущественно. Распределение P может быть известным или неизвестным, и в следующем параграфе рассматриваются задачи как с известным, так и с неизвестным P.

Так как при каждом x значения функции цели $f^0(x, \theta)$ и функций ограничений $f^i(x, \theta)$, $i = 1, \ldots, m$, зависят от реализации θ, то в задачах стохастического программирования имеется большая свобода в том, какие решения следует считать допустимыми и оптимальными. Например, должны ли они быть детерминированными или случайными?

Постановка задач стохастического программирования существенно зависит от того, имеется ли возможность при выборе решений уточнять состояние природы путем некоторых наблюдений или нет. Так, при планировании на перспективу (при перспективном планировании) решение принимается перед тем, как будут сделаны наблюдения над состоянием природы (скажем, станут известными потребности в планируемом интервале), и оно бывает детерминированным. В задачах оперативного или текущего планирования, медицинской диагностики решения принимаются после некоторых экспериментов (наблюдений) над состоянием природы θ, зависят от результатов экспериментов и поэтому бывают стохастическими.

Если в результате эксперимента состояние природы θ становится известным, то выбор решения $x(\theta)$ при данном θ сводится к обычной задаче нелинейного программирования: минимизировать

$$f^0(x, \theta) \tag{1.6}$$

при ограничениях

$$f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.7}$$

$$x \in X. \tag{1.8}$$

В общем же случае эксперимент полностью не определяет состояния природы, поэтому этапы выбора решений могут чередоваться с этапами наблюдений над состоянием природы. То есть имеют место многоэтапные процессы выбора решений, каждый из которых развивается по одной из двух цепочек:

решение — наблюдение — решение — ...
... — наблюдение — решение,

наблюдение — решение — наблюдение — ...
... — наблюдение — решение.

Условимся цепочку решений называть N-этапной, если в этой цепочке слово «решение» встречается N раз.

Если цепочка начинается со слова «решение», то условимся задачу выбора решения называть N-этапной *задачей перспективного стохастического программирования*, а если со слова «наблюдение» — N-этапной *задачей оперативного стохастического программирования.*

Заметим, что многоэтапность здесь не понимается во временном смысле. Каждый из этапов «наблюдение» или «решение» может быть связан с определенными временными этапами, и тогда целесообразно говорить об N-этапных динамических задачах стохастического программирования. Кроме того, термины «оперативное» и «перспективное» введены также чисто условно. С формальной точки зрения задачи, аналогичные задачам оперативного стохастического программирования, могут возникать не только в вопросах технико-экономического планирования, но и в медицинской диагностике (диагноз, а потому и способ лечения зависит от результатов обследования больного), в практике управления (водитель автомашины, пилот принимают решения в зависимости от наблюдаемой ситуации). При расчете же оптимальных траекторий управляемых объектов, в задачах проектирования, когда параметры системы должны быть выбраны вполне конкретными, детерминированными величинами, но в расчете на определенный диапазон случайных возмущений, возникают задачи, аналогичные задачам перспективного стохастического программирования.

Наряду с предложенной здесь терминологией (или вместо нее) можно пользоваться терминологией, принятой в теории статистических решений. В этом случае одноэтапные задачи стохастического программирования отвечают статистическим играм с единичным испытанием, а многоэтапные — играм с последовательными выборками фиксированного или нефиксированного объема.

При построении моделей оперативного и перспективного стохастического программирования, при выборе подходов к их анализу и решению важно учитывать требования, которые предъявляет практика к правилам выбора решений.

Задачи оперативного стохастического программирования — это задачи, выбор решения в которых происходит буквально в реальном масштабе времени, поэтому здесь приемлемыми могут оказаться только такие модели и методы, которые приводят к простым правилам выбора. Малая продолжительность интервала планирования обычно приводит к тому, что основные технико-экономические показатели в этом интервале не претерпевают существенных изменений, и задачи оперативного стохастического программирования с достаточной точностью аппроксимируются некоторыми детерминированными, очень часто линейными аналогами.

В задачах перспективного стохастического программирования практика не предъявляет столь жестких требований к правилам выбора решений, но здесь чрезвычайно существенным становится фактор неопределенности, из-за чего замена их детерминированными аналогами оказывается недопустимой.

В следующем параграфе будет показано, что с формальной точки зрения общие задачи стохастического программирования сводятся к задачам математического программирования в абстрактных пространствах.

Существенное отличие стохастических задач от обычных задач математического программирования состоит в том, что функционалы цели и ограничения этих задач, как правило, не вычисляются точно. В особенности это становится ясно из анализа задач перспективного стохастического программирования.

2. Задача перспективного стохастического программирования. Если решение x детерминированное и принимается перед тем, как наблюдается состояние θ, то соотношениям (1.6) — (1.7) следует придать определенный вероятностный смысл, поскольку при фиксированном x для одних θ соотношения (1.7) могут выполняться и x окажется допустимым решением, а для других могут не выполняться. Часто (1.6) — (1.8) понимаются в смысле минимизации математического ожидания

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta) \tag{1.9}$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.10}$$

$$x \in X. \tag{1.11}$$

Функции $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, называются *функциями регрессии*.

Могут быть и другие постановки задач, например, минимизировать вероятность отклонения

$$Q^0(x) = \mathsf{P}\{f^0(x, \theta) \geqslant f\} \tag{1.12}$$

при условиях

$$Q^i(x) = \mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\} - p_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.13}$$

$$x \in X, \tag{1.14}$$

где f, p_i — некоторые числа. Постановки (1.9) — (1.11) и (1.12) — (1.14) уже анализировались в предыдущем параграфе. Очевидно, что они не исчерпывают всего разнообразия постановок, так как можно рассматривать задачи, являющиеся смесью задач (1.9) — (1.11), (1.12) — (1.14), или задачи с привлечением моментов второго и более высоких порядков, однако эти постановки задач являются типичными для иллюстрации основных особенностей.

Заметим прежде всего, что формально можно рассматривать только задачу (1.9) — (1.11), так как (1.12) — (1.14) легко сводится к (1.9) — (1.11) с помощью характеристических функций множеств $\{\theta\colon f^0(x, \theta) \geqslant f\}$, $\{\theta\colon f^i(x, \theta) \leqslant 0\}$, т. е. функций

$$\chi^0(x, \theta) = \begin{cases} 1, & f^0(x, \theta) \geqslant f, \\ 0, & f^0(x, \theta) < f, \end{cases} \qquad \chi^i(x, \theta) = \begin{cases} 1, & f^i(x, \theta) \leqslant 0, \\ 0, & f^i(x, \theta) > 0, \end{cases}$$

для которых

$$\mathsf{M}\chi^0(x, \theta) = \mathsf{P}\{f^0(x, \theta) \geqslant f\}, \quad \mathsf{M}\chi^i(x, \theta) = \mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\}.$$

По внешнему виду задача (1.9) — (1.11), очевидно, напоминает обычную задачу нелинейного программирования (1.3) — (1.5) при $f^\nu(x) = F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, но это только чисто внешнее сходство. В задаче (1.9) — (1.11), как правило, не выполняется основная предпосылка теории нелинейного программирования: при каждом x невозможно вычислить точные значения функций $F^\nu(x)$, тем более их производных. Как покажут примеры, рассматриваемые в следующем параграфе, доступной является информация не о значениях $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, а о значениях функций $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, для отдельных θ; поэтому основная трудность состоит в том, чтобы решить задачу (1.9) — (1.11), не зная функций $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, а пользуясь только значениями $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$. В тех случаях, когда удается найти функции $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, экстремальная задача (1.9) — (1.11) ничем не отличается от задач нелинейного программирования, ее стохастическая природа проявляется только на этапе поиска функций $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$. В большинстве работ по стохастическому программированию авторы идут именно по этому пути, т. е. стремятся найти $F^\nu(x)$ и затем применить методы нелинейного программирования. Если это не удается сделать, заменяют задачу (1.9) — (1.11) некоторым приближенным детерминированным эквивалентом, например, рассматриваются вместо $F^\nu(x)$ функции $f^\nu(x, \bar{\theta})$, где $\bar{\theta}$ — среднее значение θ. Подобные подходы к решению можно назвать *непрямыми методами стохастического программирования* (стохастическая задача решается как бы в обход, через детерминированную задачу). В отличие от них методы поиска решений, основанные на информации о значениях $f^\nu(x, \theta)$, можно назвать *прямыми методами стохастического программирования*.

3. Общие сведения по нелинейному программированию. Решение задачи нелинейного программирования обеспечивает *абсолютный* (*глобальный*) *минимум* функции цели в допустимой области: ни в одной другой точке допустимого множества целевая функция не принимает меньшего значения. Кроме абсолютного минимума в некоторой точке допустимой области функция

цели может достигать *локального* (*относительного*) *минимума*: ни в одной точке допустимого множества, достаточно близкой к точке локального минимума, функция цели не принимает меньшего значения. Очевидно, абсолютный минимум является и относительным, однако обратное утверждение в общем случае неверно. Локальный минимум совпадает с абсолютным, например, тогда, когда допустимое множество является выпуклым множеством, а функция цели — выпуклой вниз функцией. Множество D называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x^1 \in D$, $x^2 \in D$

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2 \in D, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Множество точек $\lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, называется *отрезком*, соединяющим две точки x^1, x^2, поэтому выпуклому множеству D вместе с любыми двумя его точками принадлежит и соединяющий их отрезок.

Функция $F(x)$ называется *выпуклой вниз* (просто *выпуклой*), если для любых двух точек x^1, x^2

$$F(\lambda x^1 + (1-\lambda)\, x^2) \leqslant \lambda F(x^1) + (1-\lambda)\, F(x^2), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{1.15}$$

Если неравенство (1.15) выполняется при $0 < \lambda < 1$ как строгое неравенство, то функция называется *строго выпуклой* (*вниз*).

Функция $F(x)$ называется *выпуклой вверх* (*вогнутой*), если функция $-F(x)$ является выпуклой вниз.

Допустимое множество D является выпуклым, например, в том случае, если $f^i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ — выпуклые вниз функции, X — выпуклое множество. При этих предположениях и при выпуклой вниз функции $f^0(x)$ задачу нелинейного программирования (1.3) — (1.5) принято называть задачей *выпуклого программирования*.

Общая задача нелинейного программирования (1.3)—(1.5) тесно связана с задачей отыскания седловой точки функции Лагранжа

$$\varphi(x, u) = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x)$$

в области $x \in X$, $u \geqslant 0$. Переменные u_i, $i = 1, \ldots, m$, — множители Лагранжа. Пара векторов $(\bar{x}, \bar{u})$ называется *седловой точкой* функции $\varphi(x, u)$ в области $x \in X$, $u \geqslant 0$, если

$$\varphi(\bar{x}, u) \leqslant \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leqslant \varphi(x, \bar{u})$$

для всех $x \in X$, $u \geqslant 0$. Это можно записать еще так:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{u}) = \max_{u \geqslant 0} \min_{x \in X} \varphi(x, u) = \min_{x \in X} \max_{u \geqslant 0} \varphi(x, u).$$

Теорема 3. *Если $(\bar{x}, \bar{u})$ — седловая точка функции $\varphi(x, u)$ в области $x \in X$, $u \geqslant 0$, то $\bar{x}$ является оптимальной точкой задачи* (1.3)—(1.5).

Приведем доказательство этой теоремы, так как оно характеризует некоторые важные свойства решения $\bar{x}$ и множителей Лагранжа $\bar{u}$.

По определению седловой точки

$$f^0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(\bar{x}) \leqslant f^0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(\bar{x}) \leqslant f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(x)$$

при всех $x \in X$, $u \geqslant 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} u_i f^i(\bar{x}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(\bar{x}),$$

что возможно только в том случае, если

$$f^i(\bar{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

так как иначе выбором достаточно большого положительного числа u_i левую часть предыдущего неравенства можно сделать как угодно большой. Более того, должно также выполняться известное правило *дополняющей нежесткости* [64]:

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(\bar{x}) = 0. \tag{1.16}$$

Следовательно,

$$f^0(\bar{x}) \leqslant f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(x)$$

для всех $x \in X$, в частности, при $x \in D$ (допустимая область). Но если $x \in D$, то $f^i(x) \leqslant 0$, поэтому

$$f^0(\bar{x}) \leqslant f^0(x), \quad x \in D.$$

Теорема доказана.

Утверждение, обратное утверждению теоремы 3, имеет место лишь для задачи выпуклого программирования в предположении, что ограничения (1.4)—(1.5) удовлетворяют *условию Слейтера* [64]. Согласно этому условию должен существовать допустимый вектор $\tilde{x}$, при котором

$$f^i(\tilde{x})<0, \quad i=1, \ldots, m.$$

Важность этого условия обычно связана с тем, что из него следует ограниченность множества компонент u седловых точек $(\bar{x}, \bar{u})$ функции Лагранжа $\varphi(x, u)$.

Действительно, из неравенства

$$f^0(\bar{x}) \leqslant f^0(x)+\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f^i(x), \quad x \in X,$$

имеем

$$f^0(\bar{x}) \leqslant f^0(\tilde{x})+\bar{u}_i f^i(\tilde{x}), \quad i=1, \ldots, n,$$

так как $f^i(\tilde{x}) \leqslant 0$. Следовательно,

$$\bar{u}_i \leqslant (f^0(\bar{x})-f^0(\tilde{x}))/f^i(\tilde{x}).$$

Имеет место следующее уточнение теоремы 3. Пусть $f^{\nu}(x)$ — выпуклые вниз функции, X — выпуклое множество, ограничения (1.4)—(1.5) удовлетворяют условию Слейтера.

Теорема Куна—Таккера. *Вектор $\bar{x}$ является оптимальным тогда и только тогда, когда существует вектор $\bar{u} \geqslant 0$, при котором $(\bar{x}, \bar{u})$ является седловой точкой функции $\varphi(x, u)$.*

Доказательство этой теоремы имеется в [64].

Пусть L — *линейное пространство*, т. е. множество, в котором для каждых двух элементов $x, y \in L$ определены операция сложения $x+y \in L$ и операция умножения на вещественное число λx так, что

$$(x+y)+z=x+(y+z), \qquad x+y=y+x,$$
$$x+0=x, \qquad 0x=0,$$
$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \qquad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,$$
$$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x), \qquad 1x=x.$$

Рассмотрим *функционалы* $f^{\nu}(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, на L, т. е. отображения, ставящие в соответствие каждому $x \in L$ число $f^{\nu}(x)$, и задачу математического программирования в абстрактном пространстве: минимизировать $f^0(x)$ при ограничениях $f^i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть

$$f_v^{\nu\prime}(x, v) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f^\nu(x+\lambda v) - f^\nu(x)}{\lambda},$$

$f_v^{\nu\prime}(x)$ — выпуклые вниз по v функционалы.

Теорема 4. *Если x — решение рассматриваемой задачи, то найдутся такие числа $u_\nu \geqslant 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, не все равные 0, что*

$$\sum_{\nu=0}^{m} u_\nu f_v^{\nu\prime}(x) \geqslant 0, \quad u_i f^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство этой теоремы имеется, например, в [56].

4. Градиент. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — некоторое направление. Сдвинемся из точки x в направлении v с шагом $\rho > 0$, т. е. рассмотрим точку $x + \rho v$. Тогда при малом ρ

$$F(x + \rho v) = F(x) + \rho \sum_{j=1}^{n} F_{x_j}(x) v_j + o(\rho),$$

где величина $o(\rho)$ такова, $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, $F_{x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}$. Следовательно, направление v, в котором функция $F(x)$ убывает, должно удовлетворять условию

$$\sum_{j=1}^{n} F_{x_j} v_j < 0, \tag{1.17}$$

а вектор $v = -(F_{x_1}, \ldots, F_{x_n})$ всегда будет характеризовать направление убывания $F(x)$, причем этот вектор направлен по внутренней нормали (рис. 2) к единственной касательной гиперплоскости, которую можно провести к линии уровня $\{y\colon F(y) = F(x)\}$ в точке x. Следовательно, чтобы из точки x сместиться в область меньших значений, достаточно найти $-F_x(x)$.

Вектор $F_x(x) = (F_{x_1}, \ldots, F_{x_n})$ называется *градиентом* функции $F(x)$. Этот вектор характеризует направление возрастания $F(x)$. Вектор $-F_x(x)$ называется *антиградиентом*. Очевидно, если точка x — точка локального экстремума (локального минимума или максимума), то

$$F_x(x) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1.18)$$

В соответствии с этим определяется *градиентный метод* поиска минимума:

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \gamma_s F_x(x^s), \quad s = 0, 1, \ldots, \qquad (1.19)$$

где $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольная начальная точка; $x^s = (x_1^s, \ldots, x_n^s)$ — точка, полученная после s-го шага (итерации); ρ_s — величина шага спуска (шаговый множитель), $\rho_s \geqslant 0$; γ_s — нормирующий множитель. Если при этом удачно выбирается величина ρ_s, то с каждым шагом происходит уменьшение $F(x)$ и в пределе точка x^s приближается к точке, в которой выполняются соотношения (1.18).

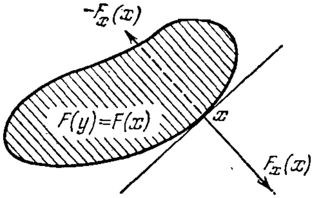

Рис 2.

5. **О минимизации негладких функций. Обобщенный градиент.** Весьма важными в прикладном отношении являются вопросы минимизации непрерывных, но негладких функций. Отсутствие непрерывных производных функций цели или ограничений экстремальной задачи существенно усложняет поиск точек экстремума. Например, если функция $F(x)$ недифференцируемая, то классические уравнения (1.18) в точках локального экстремума уже не имеют места. Негладкий характер функции обусловлен различными причинами. Часто функция бывает задана в дискретных точках, между которыми ее значения аппроксимируются функциями заданного вида, скажем линейными. Такие зависимости характерны для экономических приложений, причем заданные точки отвечают определенным качественным сдвигам планируемого процесса (введение нового пути на участке железной дороги, изменение диаметра трубопровода), между которыми затраты на единицу продукта считаются постоянными.

Важный класс негладких функций возникает в теории приближений, при решении несовместных систем уравнений, при решении параметрических задач линейного программирования, задач выбора решений при неопределенности.

Так, в качестве решения несовместной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

берется вектор x, минимизирующий функцию

$$F(x) = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right|.$$

Присутствующая здесь операция взятия максимума при каждом x приводит к негладкой функции $F(x)$. Подобная задача возникает и при выборе решения в условиях неопределенности по минимаксному критерию. В этом случае качество решения x в состоянии природы $\theta \in \Theta$ характеризуется функцией потерь $f(x, \theta)$. По минимаксному критерию выбирается такая точка x, которая минимизирует функцию

$$F(x) = \max_{\theta \in \Theta} f(x, \theta).$$

Необходимые и достаточные признаки экстремума негладких функций стали в систематической форме исследоваться в течение последнего десятилетия, и с основными результатами в этой области можно познакомиться, например, по работе [56].

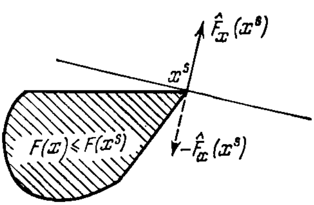

Рис 3.

Численный метод (обобщенного градиентного спуска) минимизации выпуклой вниз негладкой функции предложен в 1962 г. в работе [63], а в работах [18], [53] были даны наиболее общие условия его сходимости.

Основная идея состоит в следующем. Если выпуклая вниз функция $F(x)$ не имеет непрерывной производной, то ее линии уровня могут терпеть изломы, например так, как в точке x^s на рис. 3. В этом случае в точке x^s нет единственной касательной гиперплоскости, а имеется целое семейство так называемых опорных гиперплоскостей, которые можно провести через точку x^s.

Оказывается, что подобно тому, как касательная гиперплоскость может быть охарактеризована градиентом, каждая опорная гиперплоскость характеризуется некоторым вектором, направленным по внешней нормали к гиперплоскости и получившим название вектора обобщенного градиента. Если функция $F(x)$ выпуклая вниз, то вектором *обобщенного градиента* в точке x называется любой вектор $\hat{F}_x(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$F(z)-F(x)\geqslant(\hat{F}_x(x),\ z-x) \tag{1.20}$$

для любых точек z. Приведем примеры таких векторов.

Пусть $F(x)=\max\limits_{y\in Y} f(x,\ y)=f(x,\ y(x))$, где функция $f(x,\ y)$ при каждом y выпуклая и непрерывно дифференцируемая по x. Тогда

$$\hat{F}_x(x)=\hat{f}_x(x,\ y)\,|_{y=y(x)}=\hat{f}_x(x,\ y(x)),$$

где $\hat{f}_x(x,\ y)$ — обобщенный градиент $f(x,\ y)$ при данном y. Если $f(x,\ y)$ по x гладкая функция, то $\hat{F}_x(x)=f_x(x,\ y(x))$.

Действительно, с учетом (1.20)

$$F(z)-F(x)=f(z,\ y(z))-f(x,\ y(x))\geqslant$$
$$\geqslant f(z,\ y(x))-f(x,\ y(x))\geqslant(\hat{f}_x(x,\ y(x)),\ z-x).$$

Если, например,

$$F(x)=\max_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right|=\max_i\max_{0\leqslant\lambda_i\leqslant 1}\sum_{i,j}(a_{ij}x_j-b_i)\lambda_i,$$

то $\hat{F}_x(x)$, компоненты которого условимся обозначать через $\hat{F}_{x_j}(x)$, т. е. $\hat{F}_x(x)=\left(\hat{F}_{x_1}(x),\ \ldots,\ \hat{F}_{x_n}(x)\right)$, имеет вид

$$\hat{F}_{x_j}(x)=\begin{cases} a_{ij}, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\geqslant 0,\\ -a_{ij}, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i<0,\end{cases}$$

где $i=i(x)$.

В общем случае векторов $\hat{F}_x(x)$, удовлетворяющих (1.20), бесконечно много и каждый из них отвечает определенной опорной гиперплоскости. Но если функция $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, то неравенству (1.20) удовлетворяет единственный вектор-градиент функции $F(x)$.

По аналогии с градиентным методом (1.19) рассмотрим последовательность точек x^s, определенную соотношением

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \gamma_s \hat{F}_x(x^s), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{1.21}$$

где x^0 — произвольное начальное приближение, ρ_s — величина шага, $\hat{F}_x(x^s)$ — один из обобщенных градиентов в точке x^s; γ_s — нормирующий множитель. В частности, этот вектор может быть выбран так, как указано на рис. 3, и тогда, очевидно, движение в противоположном направлении (как того требует процедура (1.21)) не ведет в область меньших значений функции цели. То есть, в отличие от метода (1.19), метод (1.21) не дает монотонного уменьшения функции цели с каждым шагом, и в этом его качественное отличие от обычного градиентного метода. В методе (1.19) изменение шага ρ_s легко поставить в зависимость от изменения функции цели (если функция цели не убывает, то шаг уменьшается, так как поиск происходит уже в окрестности точки минимума, соизмеримой с величиной шага). В (1.21) обратную связь при управлении величинами ρ_s ввести подобным образом невозможно, поэтому в работах [18], [53] было предложено «программное» управление значением ρ_s в методе обобщенных градиентов (1.21):

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \rho_s \to 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \text{ причем } \gamma_s > 0, \; \gamma_s \|\hat{F}_x(x^s)\| \leqslant \text{const}.$$

Эти условия кажутся вполне естественными для сходимости последовательности x^s к точке минимума $F(x)$. В частности, расходимость ряда $\sum \rho_s$ должна обеспечить достижение точки экстремума из произвольной точки x^0.

Эвристически возможность поиска минимума методом (1.21) легко понять из рис. 4, из которого видно, что хотя значение функции цели и не убывает при движении в направлении вектора $-\hat{F}_x(x^s)$, но при определенном ρ_s убывает расстояние до точки минимума x^*.

Изложим доказательство сходимости процедуры (1.21), следуя работе [18]. Предварительно несколько обобщим ее. Пусть требуется минимизировать выпуклую вниз функцию $F(x)$ при $x \in X$, где X — выпуклое множество. Для решения этой задачи рассмотрим следующую процедуру:

$$x^{s+1} = \pi_X\left(x^s - \rho_s \gamma_s \hat{F}_x(x^s)\right), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{1.22}$$

где $\pi_X(z)$ — операция, которую условимся называть *операцией проектирования* точки z на множество X:

$$\pi_X(z) \in X, \quad \|y - \pi_X(z)\| \leqslant \|y - z\|$$

для любого $y \in X$.

Нетрудно убедиться в том, что в качестве $\pi_X(z)$ можно принять решение следующей экстремальной задачи (при данном z):

$$\|z - x\|^2 = \min, \quad x \in X.$$

В частности, если $X = \{x = (x_1, \ldots, x_n), \quad a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \ldots, n\}$, то

$$\pi_X(z) = (\pi_X(z)_1, \ldots, \pi_X(z)_n),$$

$$\pi_X(z)_i = \begin{cases} a_i, & z_i \leqslant a_i, \\ b_i, & z_i \geqslant b_i, \\ z_i, & a_i < z_i < b_i. \end{cases}$$

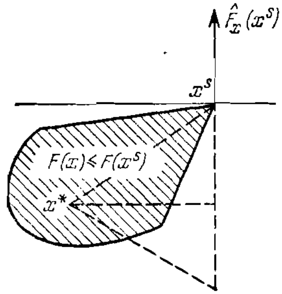

Рис. 4.

Обозначим через X^* множество точек минимума $F(x)$ в области X, точки x^s определены согласно (1.22) и существует $x^* \in X^*$, для которой $\|x^*\| \leqslant \text{const}$.

Теорема 5. *Если для любого числа $L < \infty$ найдется такое число $C_L < \infty$, что*

$$\|\hat{F}_x(x)\| \leqslant C_L \quad \textit{при} \quad \|x\| \leqslant L; \tag{1.23}$$

$$\gamma_s > 0, \quad \gamma_s \|\hat{F}_x(x^s)\| \leqslant \text{const}; \tag{1.24}$$

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \rho_s \to \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \tag{1.25}$$

то найдется такая подпоследовательность $F(x^{s_k})$ последовательности $F(x^s)$, что $\lim F(x^{s_k}) = F(x^*)$, $k \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{s\to\infty} \min\limits_{k \leqslant s} F(x^k) = F(x^*)$.

Условимся константы обозначать буквой C. По определению операции $\pi_X(z)$ и с учетом (1.23) имеем

$$\begin{aligned}\|x^* - x^{s+1}\|^2 &= \|x^* - x^s + \rho_s\gamma_s\hat{F}_x(x^s)\|^2 = \\ &= \left(x^* - x^s + \rho_s\gamma_s\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s + \rho_s\gamma_s\hat{F}_x(x^s)\right) = \\ &= \|x^* - x^s\|^2 + 2\rho_s\gamma_s\left(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s\right) + \rho_s^2\gamma_s^2\|\hat{F}_x(x^s)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|x^* - x^s\|^2 + \rho_s\gamma_s\left[2\left(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s\right) + C\rho_s\right].\end{aligned} \tag{1.26}$$

Рассмотрим произвольное $\delta > 0$. При каждом $s = 0, 1, \ldots$ возможны два случая:

$$2\left(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s\right) + C\rho_s \leqslant -\delta, \tag{1.27}$$

$$2\left(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s\right) + C\rho_s > -\delta. \tag{1.28}$$

Покажем, что не существует такого N, что при всех $s \geqslant N$ выполняется (1.27). Действительно, если бы это имело место, то при $s \geqslant N$

$$\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^* - x^s\|^2;$$

поэтому, учитывая условия теоремы, имеем $\|\hat{F}_x(x^s)\| \leqslant C$, и в соотношениях (1.24) можно взять $\gamma_s \geqslant \gamma > 0$. Тогда из (1.26) следует, что

$$\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^* - x^s\|^2 - \delta\gamma\rho_s \leqslant \|x^* - x^N\|^2 - \delta\gamma\sum_{k=N}^{s}\rho_k,$$

правая

и при $s \to \infty$ первая часть этого неравенства неограниченно убывает, что противоречит неотрицательности чисел $\|x^* - x^s\|^2$. Поэтому существуют, причем как угодно большие, номера $s = s_k$, при которых

$$2\left(\hat{F}_x(x^{s_k}),\ x^* - x^{s_k}\right) + C\rho_{s_k} > -\delta.$$

Так как $\rho_s \to 0$, то отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое K_ε, что при $k \geqslant K_\varepsilon$

$$\left(\hat{F}_x(x^{s_k}),\ x^* - x^{s_k}\right) > -\varepsilon$$

и, тем более,

$$F(x^*) - F(x^{s_k}) \geqslant \left(\hat{F}_x(x^{s_k}),\ x^* - x^{s_k}\right) > -\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{k \to \infty} F(x^{s_k}) = F(x^*).$$

Теорема 6. *Пусть в дополнение к условиям доказанной теоремы 5 множество X^* ограничено. Тогда последовательность $F(x^s)$ сходится к $F(x^*)$.*

Оценим $\|x^* - x^s\|^2$ при $s_k \leq s \leq s_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ Из неравенства (1.20) при $x = x^*$ следует неравенство

$$(\hat{F}_x(x^s),\ x^* - x^s) \leq 0;$$

поэтому при $s = s_k$ из (1.26) имеем

$$\|x^* - x^{s_k+1}\|^2 \leq \|x^* - x^{s_k}\|^2 + C\rho_{s_k}^2,$$

так как всегда можно считать $\gamma_s \leq \text{const}$. При $s \neq s_k$, $k = 0, 1, \ldots,$

$$\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leq \|x^* - x^s\|^2,$$

поэтому для любого s, $s_k \leq s < s_{k+1}$,

$$\inf_{x^*} \|x^* - x^{s+1}\|^2 \leq \inf_{x^*} \|x^* - x^{s_k}\|^2 + C\rho_{s_k}^2.$$

Так как множество X^* ограничено, $F(x^{s_k}) \to F(x^*)$, то, переходя, если надо, к подпоследовательности последовательности x^{s_k}, $k = 0, 1, \ldots$, получаем, что $\inf\limits_{x^* \in X^*} \|x^* - x^{s_k}\|^2 \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда из предыдущего неравенства получим $\inf\limits_{x^* \in X^*} \|x^* - x^s\|^2 \to 0$, т. е. $F(x^s) \to F(x^*)$ при $s \to \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в теореме 5 вместо (1.25) потребовать, чтобы

$$\rho_s \geq 0, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty,$$

то можно показать, что последовательность x^s сходится к решению $x^* \in X^*$ (без предположения об ограниченности множества X^*). Это будет легко следовать из общих результатов гл. III. Отметим также, что доказанные теоремы о сходимости метода обобщенных градиентов справедливы, по существу, для любых функций и векторов $\hat{F}_x(x)$, удовлетворяющих неравенству (1.20).

6. О методе штрафных функций. Одно из интересных приложений метода обобщенных градиентов связано с обоснованием важного *метода штрафных функций* (*прямого градиентного метода* [76]).

Пусть требуется минимизировать функцию

$$f^0(x) \tag{1.29}$$

при ограничениях

$$f^i(x), \quad i=1, \ldots, m, \tag{1.30}$$

$$x \in X. \tag{1.31}$$

Предположим, что легко осуществить операцию проектирования на множество X. Вместо сформулированной задачи рассмотрим задачу минимизации функции

$$F(x) = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} c(f^i) f^i(x) \tag{1.32}$$

при ограничениях

$$x \in X, \tag{1.33}$$

где $c(f^i) = C$ (достаточно большое число) при $f^i(x) > 0$ и $c(f^i) = 0$ при $f^i(x) = 0$.

Естественно ожидать, что при достаточно большом значении штрафа C решение задачи (1.32) — (1.33) будет в некотором смысле близко к решению (1.29) — (1.31). Так как точка локального минимума задачи (1.32) — (1.33) может не быть допустимым решением исходной задачи (1.29) — (1.31), то предположим, что $f^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые вниз и непрерывные при $x \in X$ функции, X — выпуклое и замкнутое множество, ограничения (1.30)—(1.31) удовлетворяют условию Слейтера. Обозначим через D область, высекаемую ограничениями (1.30) — (1.31).

При достаточно большом C решение задачи (1.32)—(1.33) в точности совпадает с решением задачи (1.29) — (1.31). Действительно, рассмотрим функцию Лагранжа

$$\varphi(x, u) = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x).$$

Тогда в соответствии с теоремой 3

$$\max_{u \geqslant 0} \min_{x \in X} \varphi(x, u) = \min_{x \in X} \max_{u \geqslant 0} \varphi(x, u) = \min_{x \in D} f^0(x).$$

Но так как справедливо условие Слейтера, то множество компонент седловых точек (x, u) функции $\varphi(x, u)$ ограничено, поэтому существует такое достаточно большое число C, что

$$\min_{x\in X}\max_{u\geqslant 0}\varphi(x, u)=\min_{x\in X}\max_{0\leqslant u_i\leqslant C}\left[f^0(x)+\sum_{i=1}^{m}u_i f^i(x)\right]=$$
$$=\min_{x\in X}\left[f^0(x)+\sum_{i=1}^{m}c(f^i)\,f^i(x)\right],$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что

$$F(x)=\max_{0\leqslant u\leqslant C}\left[f^0(x)+\sum_{i=1}^{m}u_i f^i(x)\right], \tag{1.34}$$

т. е. задача (1.32) — (1.33) равносильна задаче минимизации (1.34) при ограничениях (1.33). Тогда, в соответствии с п. 5, в котором указана формула обобщенного градиента функций вида (1.34), имеем

$$\hat{F}_x(x)=\hat{f}^0_x(x)+\sum_{i=1}^{m}c(f^i)\,\hat{f}^i_x(x),$$

где $\hat{f}^\nu_x(x)$ — обобщенный градиент функции $f^\nu(x)$, т. е. метод обобщенного градиента применительно к задаче минимизации (1.32) или (1.34) при ограничениях (1.33) имеет вид

$$x^{s+1}=\pi_X\left(x^s-\rho_s\gamma_s\left[\hat{f}^0_x(x^s)+\sum_{i=1}^{m}c(f^i)\,\hat{f}^i_x(x^s)\right]\right). \tag{1.35}$$

Если функции $f^\nu(x)$ гладкие, то процедура (1.35) имеет вид

$$x^{s+1}=\pi_X\left(x^s-\rho_s\gamma_s\left[f^0_x(x^s)+\sum_{i=1}^{m}c(f^i)\,f^i_x(x^s)\right]\right), \tag{1.36}$$

что полностью отвечает прямому градиентному методу, предложенному в [76] для решения задачи (1.29) — (1.31).

Интересно отметить, что даже при гладких функциях $f^\nu(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, функция $F(x)$, определенная согласно (1.32), не будет гладкой, так что обоснование прямого градиентного метода связано со сходимостью обобщенного градиентного метода. В частности, значения ρ_s, γ_s должны выбираться по теореме 5.

Метод штрафных функций (1.32) — (1.33) важен тем, что он дает точное решение исходной задачи (1.29) — (1.31) при конечном штрафе C, однако он приводит к негладкой функции цели. Чтобы получить гладкую функцию цели при гладких $f^\nu(x)$, вместо (1.32) часто рассматривается функция

$$F(x) = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} c(f^i(x))\,[f^i(x)]^2. \tag{1.37}$$

Минимизация функции (1.37) при ограничениях (1.33) дает приближенное решение задачи (1.29) — (1.33), которое стремится к точному только при $C \to \infty$.

7. Антагонистическая игра двух игроков. Игры характеризуются некоторой системой правил, определяющих поведение индивидуумов, называемых игроками. Формально антагонистическая игра двух игроков в нормальной форме (игра с противоположными интересами) определяется тройкой $(X,\ Y,\ f(x,\ y))$, где X, Y — некоторые множества, $f(x,\ y)$ — числовая функция, определенная на множестве пар $(x,\ y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Точки x, y называются *чистыми стратегиями* игроков, а $f(x,\ y)$ — платежной функцией.

Игра проводится следующим образом: первый игрок выбирает $x \in X$, независимо и одновременно второй игрок выбирает $y \in Y$, после чего второй игрок выигрывает у первого величину $f(x,\ y)$.

Применяя стратегию x, первый игрок проигрывает не более чем $\sup\limits_{y \in Y} f(x,\ y)$. Число

$$f_* = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x,\ y)$$

есть нижняя грань проигрыша первого игрока. Точно так же число

$$f^* = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x,\ y)$$

есть верхняя грань выигрыша второго игрока.

Если $f^* = f_* = v$, то v называется [3] *чистой ценой игры*.

Стратегии $x^* \in X$, $y^* \in Y$, для которых

$$f(x^*,\ y) \leqslant f(x^*,\ y^*) \leqslant f(x,\ y^*)$$

при всех $x \in X$, $y \in Y$, называются *оптимальными*, т. е. пара точек (x^*, y^*) является седловой точкой функции $f(x, y)$ в области $x \in X$, $y \in Y$.

Если существует точка $x^* \in X$, для которой

$$v = \sup_{y \in Y} f(x^*, y),$$

то x^* называется *оптимальной стратегией* (*чистой*) *первого игрока*; соответственно $y^* \in Y$, для которой

$$v = \inf_{x \in X} f(x, y^*),$$

называется *оптимальной стратегией* (*чистой*) *второго игрока*.

Не любая игра имеет чистую цену, однако если игроки выбирают стратегии x, y случайным образом, то цена игры существует для широкого класса игр. При этом, если выбор $x \in X$ и $y \in Y$ происходит в соответствии с вероятностными мерами $h(dx)$, $g(dy)$ на множествах X, Y, то эти меры называются *смешанными стратегиями* игроков.

Пусть имеется игра (X, Y, f). Тогда игра (H, G, F), где H, G состоят из вероятностных мер $h(dx)$, $g(dy)$ на X, Y и

$$F(h, g) = \int_X \int_Y f(x, y)\, h(dx)\, g(dy),$$

называется *усреднением игры* (X, Y, f). Известны следующие факты [3]:

Теорема 7. *Пусть X, Y — замкнутые ограниченные подмножества пространств R^n, R^m, $f(x, y)$ — непрерывная функция. Тогда усредненная игра (H, G, F) имеет цену, у каждого игрока имеется оптимальная стратегия $h^*(dx)$, $g^*(dy)$, причем меры $h^*(dx)$, $g^*(dy)$ имеют плотность.*

Теорема 8. *Если множество X состоит из N элементов (конечное множество), то усредненная игра (H, G, F) имеет цену и у первого игрока есть оптимальная смешанная стратегия. Если, кроме того, Y — замкнутое множество, а функция $f(x, y)$ при каждом x непрерывна по y, то и у второго игрока есть оптимальная смешанная стратегия $g^*(dy)$, представляющая распределение, сосредоточенное не более чем на N чистых стратегиях.*

В таких случаях еще говорят, что оптимальная стратегия является смесью не более N чистых стратегий.

Теорема 9. *Если X — замкнутое ограниченное множество пространства R^n, Y — замкнутое ограниченное выпуклое множество R^m, функция $f(x, y)$ при каждом $y \in Y$ непрерывна по x, при каждом $x \in X$ непрерывна и выпукла по y, то усредненная игра имеет цену, у второго игрока есть оптимальная чистая стратегия, а у первого игрока есть оптимальная смешанная стратегия, представляющая собой смесь самое большее $n+1$ чистых стратегий.*

Теорема 10. *Если (X, Y, f) — такая игра, в которой X и Y — замкнутые ограниченные выпуклые множества пространств R^n, R^m и $f(x, y)$ при любом y — непрерывная выпуклая вниз функция от x и при любом x — непрерывная выпуклая вверх функция от y, то игра имеет цену и у каждого игрока есть оптимальная чистая стратегия.*

Интересна связь условий этой теоремы с теоремой Куна — Таккера. Если в задаче нелинейного программирования функции $f^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, выпуклые вниз и X — замкнутое ограниченное выпуклое множество, то утверждение о наличии седловых точек (x, u) функции Лагранжа

$$\varphi(x, u) = f^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x)$$

в области $x \in X$, $u \geqslant 0$ непосредственно следует из сформулированной выше теоремы в том случае, когда множество вторых компонент седловых точек ограничено. Однако именно этот факт следует из условия Слейтера (см. п. 3).

§ 4. Примеры и общие постановки задач стохастического программирования

Чтобы представить, насколько разнообразными и сложными могут быть задачи стохастического программирования, понять те предположения, которые можно делать при развитии численных методов, рассмотрим несколько характерных примеров, решение которых будет дано в гл. IV. Все рассматриваемые примеры являются частными случаями следующей задачи перспективного стохастического программирования:

Найти $x=(x_1, \ldots, x_n)$, который минимизирует

$$F(x)=\mathsf{M}f(x, \theta) \tag{1.38}$$

при ограничениях

$$x \in X. \tag{1.39}$$

1. Задача статистики. Имеется случайная величина η с неизвестным средним значением $\mathsf{M}\eta$. Известны $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ — независимые наблюдения величины η. Требуется на основе этих наблюдений оценить $\mathsf{M}\eta$.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=\mathsf{M}(\eta-x)^2.$$

Легко убедиться, что точка минимума этой функции $x^*=\mathsf{M}\eta$, т. е. поиск математического ожидания $\mathsf{M}\eta$ равносилен поиску точки минимума $F(x)$. Сложность минимизации $F(x)$ в том, что известны только реализации η_1, $\eta_2, \ldots$, поэтому при каждом x невозможно вычислить $F(x)$. Очевидно, что данная задача — весьма частный случай задачи (1.38) — (1.39). Здесь $\theta=\eta$. Более сложные примеры из области статистики обсуждаются в гл. IV.

2. Оптимизация системы обслуживания. Имеется система обслуживания, представимая графом (I, U) с множеством вершин (точек) I и множеством дуг (линий со стрелками, соединяющих вершины) U. Множество I состоит из источников (или входов системы) I^+, нейтральных вершин I^0, стоков (или выходов системы) I^-. На входы системы по некоторым законам поступает ограниченное количество требований, которые затем начинают совершать на графе случайные блуждания (переходить случайным образом из одной вершины графа в другую). Каждое требование может быть потеряно или может достигнуть одного из выходов, где оно поглощается (обслуживается). Качество обслуживания на выходе зависит от запаса на этом выходе некоторых ресурсов (средств обслуживания).

Требуется все выделенные средства обслуживания распределить между выходами так, чтобы ожидаемые потери на обслуживание были наименьшими. Понятно, что каждый из выходов можно рассматривать как склад, на котором требуется создать запас некоторого продукта. В отличие от простейшей задачи складирования (§ 2) в данном случае рассматривается не один, а несколько складов, в каждом из которых для удовлетворения спроса (обслуживания требований) создается запас неоднородных продуктов (средств обслуживания).

В простейшей задаче § 2 известным было распределение величины спроса. В данном случае это распределение будет многомерным, оно сложным образом зависит от графа системы, характера блуждания требований, их взаимодействия с системой обслуживания и даже распределения средств в системе обслуживания. Нельзя считать, что для графов общего вида это распределение будет известно, т. е. получено аналитическим путем или каким-либо другим образом, например опросом экспертов.

Однако можно получить вероятности отдельных актов процесса обслуживания, из которых образуется неизвестное распределение спроса. Например, можно получить распределение общего числа требований (скажем, считать его равномерным на некотором интервале), получить вероятность гибели требования, находящегося в некоторой вершине, вероятности его перехода в смежные вершины и т. п. То есть можно получить описание происходящих в системе элементарных событий с соответствующим «весом» — вероятностью. Для краткости будем говорить, что можно задать *сценарий* поведения системы обслуживания. По сценарию затем легко составить программы для ЭВМ и имитировать с помощью ЭВМ (или с подключением других средств имитации) работу этой системы.

В общем случае таких сценариев может быть несколько, между собой они могут отличаться, например, распределением общего числа требований, порядком поступления на входы, вероятностями переходов.

Обозначим через θ_i^k количество требований, поступивших на обслуживание в вершину-выход $i \in I^-$ при произвольном проигрывании k-го сценария, $k = 1, 2, \ldots, K$; через x_{ij} обозначим количество средств обслуживания j-го типа, $j = 1, \ldots, p$, закрепленных за i-м выходом. Предположим, что потери на обслуживание θ_i^k требований, поступивших на i-й выход по k-му сценарию, выражаются некоторой функцией $f_i^k(x_{i1}, \ldots, x_{ip}, \theta_i^k)$. Например, в системах управления запасами функции $f_i^k(\cdot)$ имеют обычно следующий вид:

$$f_i^k = \begin{cases} d_i^k \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^k x_{ij} - \theta_i^k \right), & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^k x_{ij} \geqslant \theta_i^k, \\ c_i^k \left(\theta_i^k - \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^k x_{ij} \right), & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^k x_{ij} < \theta_i^k, \end{cases} \tag{1.40}$$

где λ_{ij}^k — коэффициент взаимозаменяемости единицы спроса j-м средством; d_i^k — затраты на хранение единицы ресурсов в том случае, когда уровень общего запаса $\sum_j \lambda_{ij}^k x_{ij}$ превышает спрос θ_i^k; c_i^k — убыток из-за неудовлетворенного спроса.

Для удобства записи перенумеруем вершины графа так, чтобы вершины множества I^- имели номера 1, 2, ..., n. Общие затраты зависят от номера сценария и при заданных $x = \{x_{ij}\}$, $\theta = \{\theta_i^k\}$ равны $\sum_{i=1}^{n} f_i^k (x_{i1}, \ldots, x_{ip}, \theta_i^k)$. Так как неизвестно, по какому из сценариев будет в действительности работать система обслуживания, то номер сценария $k = 1, \ldots, K$ можно рассматривать как неизвестное состояние природы (наряду с θ_i^k) и при выборе решения $x = \{x_{ij}\}$ применить один из критериев, рассмотренных в § 2. Так, затраты в расчете на наихудший сценарий характеризуются случайной величиной

$$\max_k \sum_{i=1}^{n} f_i^k (x_{i1}, \ldots, x_{ip}, \theta_i^k),$$

и можно рассмотреть задачу о выборе такой совокупности чисел $x = \{x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p\}$, которая минимизирует ожидаемые затраты

$$F(x) = \mathrm{M} \max_k \sum_{i=1}^{n} f_i^k (x_{i1}, \ldots, x_{ip}, \theta_i^k) \tag{1.41}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{1.42}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{1.43}$$

где b_j — общее количество средств j-го типа.

Эта задача является задачей вида (1.9) — (1.11) и показательна в том отношении, что в ней присутствуют различные виды неопределенности: неопределенность, вызванная неизвестным совместным распределением величин θ_i^k, $i=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, K$, и неопределенность, вызванная неизвестным номером сценария $k=1, \ldots, K$.

Очевидно, что точное значение функции $F(x)$, определенной согласно (1.11), вычислить невозможно, тем более невозможно вычислить точные значения производных функции $F(x)$. Более того, $F(x)$, вообще говоря, будет негладкой, поскольку под знаком математического ожидания присутствует операция максимизации.

Однако здесь можно широко применять имитацию («проигрывание» сценариев), что позволяет наблюдать отдельные реализации случайных величин θ_i^k, $i=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, K$, и получать значения функций $f_i^k(x_{i1}, \ldots, x_{ip}, \theta_i^k)$. В гл. IV будет показано, что этого вполне достаточно для решения полученной задачи.

3. Оптимальное программное управление случайным процессом. Имеется объект управления, поведение которого описывается системой разностных уравнений (в векторной форме)

$$\begin{gathered} z(k+1) = z(k) + A(k, \theta)\, z(k) + B(k, \theta)\, x(k) + c(k, \theta), \\ z(0) = z^0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{1.44}$$

где $z(k) = (z_1(k), \ldots, z_n(k))$ — *состояние* объекта в момент времени k, $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_m(k))$ — *управление* в этот же момент, θ — состояние природы или набор случайных возмущений. Состояние θ может иметь вид $\theta = (\theta(0), \ldots, \theta(N-1))$, а матрицы $A(k, \theta)$, $B(k, \theta)$ и вектор-функция $c(k, \theta)$ могут зависеть только от $\theta(k)$.

Управление $x(k)$ в каждый момент времени $k = 0, 1, \ldots, N-1$ должно принадлежать допустимому множеству $X(k)$, т. е.

$$x(k) \in X(k), \tag{1.45}$$

причем значение $x(k)$ определяется только моментом времени k. Матрицы $A(k, \theta)$, $B(k, \theta)$ и векторы $c(k, \theta)$ считаются известными. Имеется возможность наблюдать траекторию $z(k)$, $k = 0, 1, \ldots$

Требуется найти такое управление $x(k)$, $k=0, 1, \ldots$ $\ldots, N-1$, которое минимизирует математическое ожидание

$$F(x(0), \ldots, x(N-1)) = \\ = \mathsf{M} f(z(0), \ldots, z(N), x(0), \ldots, x(N-1), \theta), \quad (1.46)$$

где $f(z, x, \theta)$ — некоторая функция, например:

$$f(z, x, \theta) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \| z(k) - z^*(k) \|^2, \quad (1.47)$$

$z^*(k)$, $k=0, 1, \ldots$, — заданная *траектория* (детерминированная или случайная), $\|\cdot\|$ — норма (евклидово расстояние, максимальное по модулю уклонение координат). Найти без ошибок точное значение функции $F(x(0), \ldots$ $\ldots, x(N-1))$, например, для случая (1.47) практически невозможно. Вычислить же при любом θ значение $f(z(0), \ldots$ $\ldots, z(N), x(0), \ldots, x(N-1), \theta)$ не представляет труда. В гл. IV строится прямой метод минимизации $F(x(0), \ldots$ $\ldots, x(N-1))$.

4. Двухэтапная задача стохастического программирования. В рассмотренной выше задаче функцию цели (1.46) можно интерпретировать (с экономической точки зрения) как затраты на реализацию долгосрочного плана $x = (x(0), \ldots, x(N-1))$. Этот план выбирается перед тем, как становится известным истинное состояние природы θ, поэтому по мере его внедрения могут возникнуть «невязки», ликвидация которых потребует определенных затрат. Функционал (1.46) учитывает только затраты на реализацию плана и не учитывает затрат на его коррекцию. Учет затрат на коррекцию, очевидно, может существенно изменить долгосрочные планы (оптимальным станет план, устойчивый к случайным возмущениям). Это приводит к интересным и сложным задачам — двухэтапным задачам стохастического программирования.

В наиболее общем виде эти задачи будут рассмотрены в гл. IV, а здесь пока предположим, что принимаемый на перспективу план $x = (x_1, \ldots, x_n)$ должен удовлетворять линейным ограничениям

$$A(\theta) x + B(\theta) y = b(\theta), \quad (1.48)$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad (1.49)$$

где $A(\theta)$ — матрица $m\times n$, $B(\theta)$ — матрица $r\times m$, $b(\theta)=(b_1(\theta), \ldots, b_m(\theta))$ — вектор, зависящие от неизвестного состояния природы θ. План x принимается перед тем, как станет известным θ. После того, как θ становится известным, в уравнениях (1.48) могут возникнуть невязки, которые ликвидируются выбором вектора коррекции $y=(y_1, \ldots, y_r)$ из условий (1.48) — (1.49) при данных x, θ. Предположим, что затраты на реализацию плана x равны скалярному произведению

$$(c,\ x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.50}$$

затраты на коррекцию равны

$$(d(\theta),\ y)=\sum_{k=1}^{r} d_k(\theta)\, y_k. \tag{1.51}$$

Очевидно, что если план x принят, а θ стало известным, то вектор коррекции y лучше всего выбрать из условия минимума затрат (1.51) при условиях (1.48) — (1.49) при данных x, θ. Получаемый при этом вектор оптимальной коррекции x в состоянии θ обозначим через $y(x,\ \theta)$. Предположим, что $y(x,\ \theta)$ существует при всех x, θ. Тогда ожидаемые затраты на реализацию плана x и его оптимальную коррекцию равны

$$F(x)=(c,\ x)+\mathrm{M}\,(d(\theta),\ y(x,\ \theta)). \tag{1.52}$$

Требуется найти такой план x, который минимизирует общие затраты (1.52) при условии

$$x\geqslant 0. \tag{1.53}$$

Вычисление точного значения $F(x)$ в данном примере связано, по крайней мере, с поиском закона распределения (в зависимости от x) оптимального значения линейной функции $(d(\theta),\ y(x,\ \theta))$ задачи линейного программирования (1.50) — (1.51). Очевидно, что это можно сделать только в очень редких случаях. Наблюдать же при каждом θ значения $(d(\theta),\ y(x,\ \theta))$, необходимые для прямых методов, не представляет труда. Заметим также, что функция $F(x)$, вообще говоря, не будет гладкой, поскольку негладкой при каждом θ является функция $(d(\theta),\ y(x,\ \theta))$.

5. Задача диагностики. Все рассмотренные в предыдущих пунктах задачи были частными случаями задачи перспективного стохастического программирования (1.38) — (1.39). Рассмотрим пример, который показывает, что к виду (1.38) — (1.39) сводятся и задачи оперативного стохастического программирования.

В задачах диагностики, например, когда требуется установить, болен или нет данный пациент подозреваемой болезнью (состояние природы $\theta = 1$ или 0), делается рентгеновский снимок, анализ крови и т. п.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — конечное множество возможных исходов эксперимента. *Правилом решения* называется предсказание, которое с каждым исходом $\omega \in \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ связывает определенное действие $x(\omega)$. Например, $x(\omega) = 1$ (при исходе ω утверждается, что пациент болен), $x(\omega) = 0$ (при исходе ω утверждается, что пациент не болен). Пусть $p_j(\theta)$ — вероятность того, что при истинном состоянии θ эксперимент приведет к исходу ω_j. Через $g(x, \theta)$ обозначим убыток (функцию потерь), вызванный решением x, когда пациент находился в состоянии θ. Тогда риск, отвечающий правилу $x(\omega) = (x_1, \ldots, x_n)$, равен

$$f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \sum_{j=1}^{n} g(x_j, \theta)\, p_j(\theta).$$

Если имеется априорное распределение $\mathsf{P}(d\theta)$ вероятностей для состояний θ, то естественно рассматривать задачу минимизации математического ожидания

$$F(x) = \mathsf{M} f(x_1, \ldots, x_n, \theta)$$

при условии

$$x_j \in X_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где X_j — множество допустимых решений при исходе ω_j. В данном случае под состоянием природы понимается состояние пациента. В результате эксперимента могут наблюдаться некоторые следствия этого состояния $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_n$, в зависимости от которых должно быть выбрано действие $x(\omega)$.

6. Об общих постановках задач. В любой научной дисциплине одинаково важными являются обобщение и конкретизация. Например, имеется общая теория случайных процессов и теория марковских процессов,

общая теория линейного программирования и теория потоков в сетях (задачи транспортного типа). В исследованиях общего характера имеется опасность получить слишком общие результаты, из которых чрезвычайно трудно (или вообще невозможно) делать конкретные выводы. Симплекс-метод является универсальным методом линейного программирования, его можно применить к любой задаче линейного программирования, однако этот метод обычно не применяется для решения транспортной задачи, так как она имеет существенные особенности и симплекс-метод для нее оказывается слишком громоздким, а поэтому и неэффективным. Из общих результатов порой слишком трудно получить частные результаты даже путем подгонки под известный ответ. Например, известный принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления трудно получить из общих условий оптимальности математического программирования в абстрактных пространствах.

При конкретизации есть опасность получить тривиальные результаты, не имеющие сколько-нибудь общего характера.

Эти общие замечания касаются и стохастического программирования. Здесь также одинаково важно вести исследования как в направлении обобщений, так и в направлении конкретизации, сочетать исследования общего характера с более тонкими исследованиями специальных классов задач.

В общих постановках задач стохастического программирования, по всей видимости, наиболее естественно применять формализм общей теории статистических решений [3], [48], обобщающий рассуждения предыдущего пункта.

Имеются *пространства* (измеримые, см. § 1) *параметров* или *состояний природы* $(\Theta, \mathcal{T})$, *наблюдений* $(\Omega, \mathcal{A})$ и *решений* $(X, \mathcal{E})$. Пространство наблюдений — это некоторое множество возможных исходов экспериментов (наблюдений) над состоянием природы, причем эксперименты могут быть многошаговыми, с нефиксированным заранее числом наблюдений, в которых решение о проведении еще одного наблюдения или даже типа наблюдения зависит от предыдущей истории экспериментирования.

Правилом решения (*стратегией* или просто *решением*) называется измеримое отображение $x(\omega)$ пространства

$(\Omega, \mathscr{A})$ в пространство $(X, \mathscr{E})$, т. е. такое, что $\{\omega: x(\omega) \in E\} \in \mathscr{A}$ для любого $E \in \mathscr{E}$. Иначе говоря, стратегия состоит в принятии решения $x \in X$ по наблюдению ω.

Имеется действительная измеримая функция убытка (потерь) $g(x, \theta)$, которая представляет собой затраты, связанные с x, когда состояние природы θ. Эта функция составляется на основании стоимости самого решения (стоимость труда, материалов и т. п.), убытка, вызванного неправильным решением. В более общих случаях, когда учитываются затраты на наблюдение, g зависит и от ω. Пространство наблюдений $(\Omega, \mathscr{A})$ представляет множество исходов экспериментов над θ, поэтому обычно предполагается, что на $(\Omega, \mathscr{A})$ определена зависящая от θ вероятность $\mathsf{P}(\theta, A)$, $A \in \mathscr{A}$. При данном ω правило может быть как детерминированным $x(\omega)$, так и случайным с вероятностью $h(\omega, dx)$. Тогда *риск* (ожидаемый убыток) равен

$$f(x(\omega), \theta) = \int_{\Omega} g(x(\omega), \theta)\, \mathsf{P}(\theta, d\omega) \tag{1.54}$$

или

$$q(h, \theta) = \int_{\Omega} \mathsf{P}(\theta, d\omega) \int_{X} g(x, \theta)\, h(\omega, dx). \tag{1.55}$$

Риск зависит от стратегии и состояния природы θ. Если предположить, что для состояний природы θ задана вероятностная мера P, т. е. что пространство состояний природы $(\Theta, \mathscr{T})$ — вероятностное с мерой $\mathsf{P}(d\theta)$, то естественно рассматривать задачи минимизации риска

$$F(x(\omega)) = \int f(x(\omega), \theta)\, \mathsf{P}(d\theta) \tag{1.56}$$

или

$$Q(h) = \int q(h, \theta)\, \mathsf{P}(d\theta) \tag{1.57}$$

соответственно при условиях

$$x(\omega) \in X, \tag{1.58}$$

$$\int_{X} h(\omega, dx) = 1. \tag{1.59}$$

В этом случае оптимальная стратегия называется *байесовской*.

Наряду с этими задачами часто рассматриваются задачи поиска стратегий $x^*(\omega)$, $h^*(\omega, dx)$, для которых не существует других стратегий $x(\omega)$, $h(\omega, dx)$, удовлетворяющих (1.58), (1.59) и

$$f(x(\omega), \theta) \leqslant f(x^*(\omega), \theta), \quad f(x(\omega), \theta) \not\equiv f(x^*(\omega), \theta), \tag{1.60}$$

$$q(h, \theta) \leqslant q(h^*, \theta), \qquad q(h, \theta) \not\equiv q(h^*, \theta) \tag{1.61}$$

для всех θ P-меры 1. Стратегии x^*, h^* называются *P-допустимыми*.

Оказывается, всякая байесовская стратегия *P-допустима*. В тех случаях, когда $P(d\theta)$ не задана, считается, что стратегии $x^*(\omega)$, $h^*(\omega, dx)$ должны удовлетворять (1.60), (1.61) при всех $\theta \in \Theta$.

Заметим, что P-допустимые стратегии аналогичны понятию оптимальности по Парето в задачах выбора решений при неопределенности. Очевидно, наряду с постановками (1.56) — (1.61) можно рассматривать и другие, отвечающие различным принципам выбора решений при неопределенном состоянии природы (см. § 2).

Заметим, что (1.56), (1.57) представляют функционалы в абстрактных пространствах стратегий $x(\omega)$, $h(\omega, dx)$, причем (1.57) — аддитивный функционал.

Смешанная стратегия $h(\omega, dx)$ является более общей, чем детерминированная $x(\omega)$ (при данном ω), тем не менее эти случаи, как станет ясно из § 1 гл. II, следует анализировать особо.

В сформулированной задаче статистических решений, если пользоваться терминологией математического программирования, (1.56), (1.57) — функционалы цели, (1.58), (1.59) — дополнительные ограничения. В общих задачах стохастического программирования наряду с ограничениями (1.58), (1.59) будут ограничения вида

$$F^i(x(\omega)) = \int f^i(x(\omega), \theta)\, P(d\theta) \leqslant 0$$

или

$$Q^i(h) = \int q^i(h, \theta)\, P(d\theta) \leqslant 0.$$

Заметим, что если множество Ω состоит из единственной точки, то получаемые при этом задачи превращаются в задачу перспективного стохастического программирования вида (1.7) — (1.9) с детерминированным или случайным выбором решения. В качестве общей задачи оперативного стохастического программирования часто можно ограничиться следующей задачей.

Имеется вероятностное пространство $(\Theta, \mathscr{T}, \mathsf{P})$ и σ-подалгебра $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{T}$. Требуется найти случайный вектор $x(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$, измеримый относительно $\mathscr{B}$ и минимизирующий

$$F^0(x(\theta)) = \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta) \tag{1.62}$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \mathsf{M} f^i(x(\theta), \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.63}$$

$$x(\theta) \in X(\theta). \tag{1.64}$$

Выше везде предполагалось, что распределение $\mathsf{P}(d\theta)$ не зависит от x. В общих случаях это не так, например, в задаче, рассмотренной в п. 1, распределение величин θ_i^k (числа требований, поступивших на обслуживание на i-й выход), вообще говоря, зависит от плана $x = \{x_{ij}\}$.

Дополнения к главе I

1. Если $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, где $f_j(x_j)$ — выпуклые вниз функции, то

$$\hat{f}_x(x) = \left(\lambda_1 f_1^+(x_1) + (1-\lambda_1) f_1^-(x_1), \ldots, \lambda_n f_n^+(x_n) + (1-\lambda_n) f_n^-(x_n)\right),$$

где через $f_j^{\pm}(x_j)$ обозначено значение правой или левой производной функции $f_j(x_j)$, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$. Если $f(x) = \Phi(f^1(x), \ldots, f^r(x))$, где $f^l(x)$ — выпуклые вниз функции, функция $\Phi(z_1, \ldots, z_r)$ такова, что $\Phi_{z_l}(z) \geqslant 0$, $\Phi(z)$ — выпуклая вниз, то

$$\hat{F}_x(x) = \sum_{l=1}^{r} \Phi_{z_l}\left(f^1(x), \ldots, f^r(x)\right) \hat{f}_x^l(x).$$

Действительно, если $z' = (f^1(x'), \ldots, f^r(x'))$, $z = (f^1(x), \ldots, f^r(x))$, то

$$\Phi(z') - \Phi(z) \geqslant (\Phi_z(z), z' - z).$$

Так как $z_l' - z_l = f^l(x') - f^l(x) \geqslant \left(\hat{f}_x^l(x), x' - x\right)$, то

$$\Phi(z') - \Phi(z) \geqslant \sum_{l=1}^{r} \Phi_{z_l}(z)\left(\hat{f}_x^l(x), x' - x\right),$$

что и требовалось доказать.

2. Множество обобщенных градиентов в точке x при $F(x) < \infty$, выпукло и замкнуто.

3. Если $f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, $x_j=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}x_{ij}$, $f_j(x_j)$ — выпуклые вниз функции, то

$$\hat{f}_x(x)=\left(f_j^{+}(x_j)\lambda_{ij},\quad i=1,\ \ldots,\ r,\quad j=1,\ \ldots,\ n\right).$$

4. Если $X=\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_n):\ x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0\}$, то

$$\pi_X(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ \max\{0,\ x\} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где операция max берется покоординатно.

5. Пусть множество X задано соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j=a,\quad x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ n \tag{1.65}$$

Операция проектирования произвольной точки $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ на X сводится к минимизации $\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2$ при условиях (1.65). Существует простой конечный метод решения этой задачи.

Пусть $x^0=(0,\ \ldots,\ 0)$ и получено приближение $x^k=\left(x_1^k,\ \ldots,\ x_n^k\right)$, у которого n_k компонент отличны от 0, например, пусть $x_1^k>0,\ \ldots$ $\ldots,\ x_{n_k}^k>0,\ x_{n_k+1}^k=0,\ \ldots,\ x_n^k=0$, причем

$$\frac{x_1^k-y_1}{a_1}=\ldots=\frac{x_{n_k}^k-y_{n_k}}{a_{n_k}}<\frac{x_{n_k+1}^k-y_{n_k+1}}{a_{n_k+1}}\leqslant\ldots\leqslant\frac{x_n^k-y_n}{a_n}.$$

Положим

$$\Delta_k^1=\frac{x_{n_k+1}^k-y_{n_k+1}}{a_{n_k+1}}-\frac{x_{n_k}^k-y_{n_k}}{a_{n_k}},$$

$$\Delta_k^2=\frac{b-\sum_{j=1}^{n_k}a_jx_j^k}{\sum_{i=1}^{n_k}a_i^2},$$

$$x_j^{k+1}=\begin{cases}x_j^k+\Delta_k a_j, & j=1,\ \ldots,\ n_k,\\ x_j^k, & j=n_k+1,\ \ldots,\ n,\end{cases}$$

где $\Delta_k=\min\left(\Delta_k^1,\ \Delta_k^2\right)$.

Если при этом $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{k+1} < b$, то описанный процесс повторяется для точки x^{k+1}. Если же $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{k+1} = b$, то $\pi_X(y) = x^{k+1}$. Действительно, в этом случае решение x^{k+1} обладает следующим свойством: существует число u такое, что

$$x_j^{k+1} - y_j = ua_j, \qquad x_j^{k+1} > 0,$$
$$x_j^{k+1} - y_j \geqslant ua_j, \qquad x_j^{k+1} = 0,$$

т. е. для x^{k+1} справедливо необходимое и достаточное условие оптимальности

6. Простейшая коррекция в двухэтапных задачах. Пусть имеется система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j = b_i(\theta), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

со случайными величинами $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$. Если вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выбирается перед тем, как станут известными эти величины, то после наблюдения a_{ij}, b_i в уравнениях возникают невязки двух видов:

$$y_i^+ = b_i(\theta) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j, \quad \text{если} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j \leqslant b_i(\theta),$$

$$y_i^- = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j - b_i(\theta), \quad \text{если} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j > b_i(\theta).$$

Поэтому в приложениях часто ограничения (1.48) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + y_i^+ - y_i^- = b(\theta), \tag{1.66}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad y_i^+ \geqslant 0, \qquad y_i^- \geqslant 0, \tag{1.67}$$

а затраты на коррекцию (1.52) равны

$$\sum_{i=1}^{m} \left(d_i^+(\theta)\, y_i^+ + d_i^-(\theta)\, y_i^-\right). \tag{1.68}$$

По смыслу задачи величины y_i^+, y_i^- должны удовлетворять нелинейному ограничению

$$y_i^+ y_i^- = 0, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.69}$$

В том случае, когда $d_i^+ + d_i^- > 0$, вектор оптимальной коррекции

$$y(x, \theta) = (y_1^+(x, \theta),\ y_1^-(x, \theta),\ \ldots\ y_m^+(x, \theta),\ y_m^-(x, \theta)),$$

минимизирующий (1.68) при условиях (1.66)—(1.67) для данных x, θ, удовлетворяет ограничениям (1.69) автоматически, и в этом случае (1.69) не учитываются. При этом решение задачи линейного программирования (1.66)—(1.68) сводится к следующим простейшим вычислениям:

Определяется

$$\Delta_i = b_i(\theta) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j.$$

Если $\Delta_i \geqslant 0$, то $y_i^+(x, \theta) = \Delta_i$, $y_i^-(x, \theta) = 0$; если $\Delta_i < 0$, то $y_i^+(x, \theta) = 0$, $y_i^-(x, \theta) = -\Delta_i$. Двойственные переменные $u(x, \theta) = (u_1(x, \theta), \ldots, u_m(x, \theta))$, отвечающие $y(x, \theta)$, определяются соотношениями

$$u_i(x, \theta) = \begin{cases} d_i^+(\theta), & \text{если} \quad \Delta_i \geqslant 0, \\ d_i^-(\theta), & \text{если} \quad \Delta_i < 0. \end{cases} \tag{1.70}$$

7. Двухэтапные задачи с искусственными переменными. Существование вектора коррекции $y(x, \theta)$, удовлетворяющего ограничениям (1.48), при любых x и θ зависит от матрицы коррекции $B(\theta)$. Введением искусственных переменных можно получить задачу, в которой при каждых x, θ существует вектор оптимальной коррекции.

Если ввести неотрицательные переменные y_{r+i}^+, y_{r+i}^-, то уравнения (1.48) можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{kj}(\theta) y_j + y_{r+i}^+ - y_{r+i}^- = b_i(\theta), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Одновременно введем эти переменные в линейную форму (1.40) с достаточно большим коэффициентом (штрафом) C, т. е. рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{r} d_k(\theta) y_k + C \sum_{k=1}^{r} (y_{r+k}^+ - y_{r+k}^-).$$

В результате получим новую задачу, которая при достаточно большом C будет равносильна исходной (1.48)—(1.53) и в которой при любых x, θ существует вектор оптимальной коррекции.

ГЛАВА II

НЕПРЯМЫЕ МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Под непрямыми методами решения какой-либо задачи обычно понимаются методы, основанные на сведении ее к некоторой другой задаче. Так, непрямые методы минимизации функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ состоят в решении системы уравнений

$$F_{x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которой, в силу необходимых признаков экстремума, удовлетворяют точки минимума.

Непрямые методы стохастического программирования могут быть основаны на применении необходимых признаков экстремума, на сведении или подмене стохастической экстремальной задачи детерминированным аналогом — задачей нелинейного программирования, решение которой можно получить известными методами нелинейного программирования.

Непрямыми методами решается весьма узкий класс задач стохастического программирования, так как успех их применения существенно зависит от специальных свойств задачи, законов распределения вероятностей. В настоящее время в этой области имеется множество специальных приемов и цель этой главы состоит не в том, чтобы дать полное представление о них, а в том, чтобы познакомить с наиболее типичными подходами.

§ 1. О признаках экстремума

1. Довольно общие задачи стохастического программирования, как это следует из § 4 гл. I, можно сформулировать следующим образом.

Задача перспективного стохастического программирования. Требуется найти точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$, минимизирующую функцию цели

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$x \in X, \tag{2.3}$$

где состояние природы θ — элементарное событие вероятностного пространства $(\Theta, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Вероятностные ограничения вида

$$\mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\} \geqslant p_i \tag{2.4}$$

легко свести к (2.2) введением характеристической функции

$$\chi^i(x, \theta) = \begin{cases} 1, & f^i(x, \theta) \leqslant 0, \\ 0, & f^i(x, \theta) > 0, \end{cases}$$

однако функции $\chi^i(x, \theta)$ будут негладкими по x. Поэтому в тех случаях, когда исследование задачи (2.1)—(2.3) существенно связано с гладким характером функций $f^i(x, \theta)$, среди ограничений (2.2) особо выделяются ограничения вида (2.4).

Задача оперативного стохастического программирования. Имеется вероятностное пространство $(\Theta, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и σ-подалгебра $\mathscr{B}$, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$. Требуется найти измеримую относительно $\mathscr{B}$ вектор-функцию $x(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$, которая минимизирует

$$F^0(x(\theta)) = \mathsf{M} f^0(x(\theta), \theta) \tag{2.5}$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \mathsf{M} f^i(x(\theta), \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

$$x(\theta) \in X. \tag{2.7}$$

Рассмотрение σ-подалгебры $\mathscr{B}$ равносильно указанию того, какие события из всей совокупности событий $\mathscr{F}$ может наблюдать принимающий решение в результате эксперимента над θ. Если $\mathscr{B}$ не указывать, то это должно означать, что в результате эксперимента состояние θ наблюдается, и тогда $x(\theta)$ лучше всего выбирать как точку минимума

$$f^0(x, \theta) \tag{2.8}$$

при ограничениях

$$f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad = 1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

$$x \in X, \tag{2.10}$$

т. е. постановка задачи (2.5)—(2.7) в таком случае требует обоснования.

Как и в задаче (2.1)—(2.3), среди ограничений (2.6) иногда выделяются ограничения вида

$$\mathsf{P}\{f^i(x(\theta),\ \theta)\leqslant 0\}\geqslant p_i. \tag{2.11}$$

В задаче (2.5)—(2.7) решение $x(\theta)$ однозначно определяется исходом эксперимента. Если при заданном исходе θ решение выбирается случайным образом, то задача оперативного стохастического программирования состоит в выборе вместо $x(\theta)$ функции (переходной вероятности) $h(\theta,\ dx)$, которая при каждом θ является вероятностной мерой на X и для любого dx — измеримой функцией относительно $\mathscr{B}$. Функция $h(\theta,\ dx)$ должна минимизировать

$$Q^0(h)=\int_\Omega \mathsf{P}(d\theta)\int_X f^0(x,\ \theta)\,h(\theta,\ dx) \tag{2.12}$$

при ограничениях

$$Q^i(h)=\int_\Omega \mathsf{P}(d\theta)\int_X f^i(x,\ \theta)\,h(\theta,\ dx)\leqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{2.13}$$

$$\int_X h(\theta,\ dx)=1. \tag{2.14}$$

2. Необходимые признаки экстремума для сформулированных задач можно получить чисто формально или учитывать их вероятностную природу, в частности то обстоятельство, что значения функций $F^\nu(x)$, $Q^\nu(h)$, $\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$, и их производных не вычисляются точно.

С формальной точки зрения задача (2.1)—(2.3) — задача нелинейного программирования, а (2.5)—(2.7), (2.12)—(2.14) — задачи программирования в абстрактных пространствах, поэтому необходимые признаки оптимальности для них можно получить по аналогии с известными результатами математического программирования. Однако полученные таким образом признаки оптимальности не будут иметь для стохастических задач такого значения, как для обычных детерминированных задач. Так, пусть требуется минимизировать функцию регрессии

$$F(x)=\mathsf{M}f(x,\ \theta).$$

Если $F(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и выполнены предпосылки, достаточные для дифференцирования по x под знаком математического ожидания, то в точках минимума

$$F_{x_i}(x) = \mathsf{M} f_{x_i}(x, \theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

но поскольку $F_{x_i}(x)$, как правило, точно не вычисляется, то проверить эти соотношения невозможно. Поэтому необходимый признак (2.15) следует видоизменить с учетом вероятностной природы (2.15), например, дополнить его процедурой проверки статистической гипотезы о том, что математическое ожидание величины $f_{x_i}(x, \theta)$ равно 0.

Такой подход будет рассмотрен в гл. V при изучении задач стохастического программирования с конечным числом испытаний.

Очевидно, аналогичные замечания справедливы и для общей задачи перспективного стохастического программирования (2.1) — (2.3) и тем более для задач оперативного стохастического программирования. В последнем случае кроме отмеченных особенностей необходимо учитывать также то обстоятельство, что решение задачи (2.5)—(2.7) является функцией, измеримой относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}$. Остановимся на этом более подробно.

Пусть $(\Theta, \mathscr{T}, \mathsf{P})$ — исходное вероятностное пространство, $\mathscr{B}$ — σ-подалгебра $\mathscr{T}$ и требуется найти случайную функцию $x(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_n(\theta))$, измеримую относительно $\mathscr{B}$, которая минимизирует функционал

$$F(x(\theta)) = \mathsf{M} f(x(\theta), \theta).$$

Если $x(\theta)$ — оптимальное решение, $v(\theta) = (v_1(\theta), \ldots, v_n(\theta))$ — произвольная вектор-функция, измеримая относительно $\mathscr{B}$, то

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{F(x(\theta) + \lambda v(\theta)) - F(x(\theta))}{\lambda} = F'_{v(\theta)}(x(\theta)) = 0, \tag{2.16}$$

где $F'_{v(\theta)}(x(\theta))$ — производная $F(x(\theta))$ по направлению $v(\theta)$ (предполагается, что она существует).

Если выполнены условия, достаточные для дифференцирования под знаком математического ожидания, то из (2.16) получим, что

$$F'_{v(\theta)}(x(\theta)) = \mathsf{M} f'_{v(\theta)}(x(\theta), \theta) = 0. \tag{2.17}$$

Если теперь учесть, что $x(\theta)$, $v(\theta)$ измеримы относительно $\mathcal{B}$, то из формально полученных условий (2.17) легко получить, что при каждом θ для любого вектора $v = (v_1, \ldots, v_n)$ значения $x(\theta)$ должны удовлетворять уравнению

$$\mathsf{M}(f'_v(x, \theta)/\mathcal{B}) = 0. \tag{2.18}$$

Действительно, так как $v(\theta) = (v_1(\theta), \ldots, v_n(\theta))$ — произвольная измеримая относительно $\mathcal{B}$ функция, то, рассматривая функцию $v(\theta)$, которая принимает постоянное значение $v = (v_1, \ldots, v_n)$ на B и 0 на $\bar{B}$, получим, что $f'_{v(\theta)}(x(\theta), \theta) = 0$ при $\theta \in \bar{B}$ ($\theta \,\bar{\in}\, B$). Следовательно, для любого $B \in \mathcal{B}$

$$\mathsf{M}(f'_v(x, \theta)/B) = 0,$$

т. е. соотношения (2.18) действительно выполняются.

Аналогичным образом легко получить необходимые признаки для задачи минимизации

$$F^0(x(\theta)) = \mathsf{M}f^0(x(\theta), \theta) \tag{2.19}$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \mathsf{M}f^i(x(\theta), \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.20}$$

Если воспользоваться теоремой 4 гл. I о необходимых признаках оптимальности в абстрактных пространствах, то получим, что решение этой задачи должно удовлетворять соотношениям

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \mathsf{M}f^{\nu'}_{v(\theta)}(x(\theta), \theta) \geqslant 0,$$

$$\lambda_i \mathsf{M}f^i(x(\theta), \theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

для произвольной $\mathcal{B}$-измеримой функции $v(\theta) = (v_1(\theta), \ldots$ $\ldots, v_n(\theta))$. Так как функция $v(\theta)$ — произвольная, то аналогично (2.18) отсюда получаем, что каждое значение x функции $x(\theta)$ должно удовлетворять соотношениям

$$\sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu \mathsf{M}(f^{\nu'}_v(x, \theta)/\mathcal{B}) \geqslant 0,$$

$$\lambda_i \mathsf{M}f^i(x, \theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.21}$$

где $f^{\nu'}_v(x, \theta)$ — производная функции $f^\nu(x, \theta)$ при данном θ по направлению $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

3. Остановимся вкратце на необходимых признаках оптимальности в задаче (2.12) — (2.14), в которой решение отыскивается в классе смешанных стратегий, т. е. когда при заданном исходе выбор x происходит в соответствии с вероятностной мерой на X. Применение смешанных стратегий линеаризует исходную экстремальную задачу, поэтому можно ожидать, что в этом случае при весьма общих функциях $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, будет справедлива теорема Куна — Таккера. Для простоты рассмотрим только тот случай, когда $x(\theta)$, $h(\theta, dx)$ не зависят от θ. Итак, пусть требуется минимизировать

$$F^0(x) \tag{2.22}$$

при ограничениях

$$F^i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.23}$$

$$x \in X. \tag{2.24}$$

Если смешанную стратегию обозначить через $h(dx)$, то имеем задачу: найти вероятностную меру $h(dx)$, которая минимизирует

$$Q^0(h) = \mathsf{M}F^0(x) = \int_X F^0(x)\, h(dx) \tag{2.25}$$

при ограничениях

$$Q^i(h) = \mathsf{M}F^i(x) = \int_X F^i(x)\, h(dx) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.26}$$

$$\int_X h(dx) = 1. \tag{2.27}$$

Функцию $h(dx)$, удовлетворяющую ограничениям (2.26) — (2.27), назовем допустимым решением. Допустимое решение, минимизирующее (2.25), — оптимальным решением. Покажем прежде всего, что задача (2.25) — (2.27) равносильна некоторой задаче нелинейного программирования (в конечномерном пространстве).

Положим

$$z_\nu = F^\nu(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, m.$$

Если x пробегает множество X, то вектор $z = (z_0, \ldots, z_m)$ пробегает некоторое подмножество Z,

$$Z = \{z\colon\ z = (F^0(x), \ldots, F^m(x)),\ x \in X\}. \tag{2.28}$$

В общем случае Z — невыпуклое и незамкнутое множество. Обозначим через $\operatorname{co} Z$ выпуклую оболочку этого множества, т. е.

$$\operatorname{co} Z = \left\{ z = \sum_{k=1}^{r} p_k z^k \colon z^k \in Z, \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{r} p_k = 1,\ p_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, r \right\},$$

где r — произвольное целое положительное число.

Для любого множества A из R^n множество $\operatorname{co} A$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее A. Если A — ограниченное множество, т. е. $\|a\| \leqslant \mathrm{const}$ при $a \in A$, то $\operatorname{co} A$ также ограничено; если A — замкнутое множество, т. е. множество, содержащее пределы сходящихся последовательностей, то $\operatorname{co} A$ также замкнуто. Ограниченное замкнутое множество называется компактным, поэтому можно сказать, что если A компактно, то и $\operatorname{co} A$ — компактное множество.

При всевозможных $h(dx)$, удовлетворяющих (2.27), множество G векторов $Q = (Q^0(h), \ldots, Q^m(h))$ не у́же $\operatorname{co} Z$, так как в качестве $h(dx)$, в частности, можно рассматривать дискретные распределения, сосредоточенные только в конечном числе точек. Покажем, что $\operatorname{co} Z = G$, если Z замкнуто.

Так как Z — замкнутое множество, то замкнуто и $\operatorname{co} Z$. Приближая $\int\limits_X f^\nu(x)\, h(dx)$ интегральными суммами, которые при фиксированном разбиении формально имеют вид

$$\sum_{k=1}^{N} F^\nu(x^k)\, p_k, \qquad \sum_{k=1}^{N} p_k = 1, \qquad p_k \geqslant 0,$$

и поэтому принадлежат $\operatorname{co} Z$, получим в силу замкнутости $\operatorname{co} Z$, что и предел этих сумм принадлежит $\operatorname{co} Z$, т. е. действительно $G = \operatorname{co} Z$.

Таким образом, задача (2.25) — (2.27) эквивалентна следующей: минимизировать z^0 при ограничениях

$$z = (z_0, \ldots, z_m) \in \operatorname{co} Z, \quad z_i \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Преобразуем эту задачу, для чего воспользуемся следующей известной теоремой:

Теорема 1. *Пусть A — некоторое множество из R^n. Тогда каждая точка $\operatorname{co} A$ может быть представлена как выпуклая комбинация не более чем $n+1$ точек множества A,* Таким образом,

$$\operatorname{co} Z = \left\{ z = \sum_{k=1}^{m+2} F^{\nu}(x^k)\, p_k \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m): \right.$$

$$\left. p_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m+2} p_k = 1, \quad x^k \in X \right\},$$

поэтому предыдущая задача, а вместе с ней и задача (2.25) — (2.27) при замкнутом множестве Z равносильна следующей конечномерной задаче:

Найти такие точки $x^k \in X$, $k = 1, \ldots, m+2$, и числа p_k, которые минимизируют

$$\sum_{k=1}^{m+2} f^0(x^k)\, p_k \tag{2.29}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{m+2} f^i(x^k)\, p_k \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.30}$$

$$\sum_{k=1}^{m+2} p_k = 1, \quad p_k \geqslant 0, \tag{2.31}$$

$$x^k \in X, \quad k = 1, \ldots, m+2. \tag{2.32}$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Если множество Z, определенное согласно* (2.28), *замкнуто, то решение задачи* (2.25) — (2.27) *представляет собой дискретное распределение, сосредоточенное в конечном числе точек, а задача* (2.25) — (2.27) *равносильна конечномерной задаче* (2.29) — (2.32).

Существует простая схема решения полученной задачи в том случае, когда значения $F^{\nu}(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, $x \in X$, известны (см. дополнения, п. 1).

Обсудим теперь вопрос о теореме Куна — Таккера для задачи (2.25) — (2.27). Эту теорему можно получить, отправляясь от эквивалентной задачи (2.29) — (2.32), которая при фиксированном наборе точек $x^1, \ldots, x^{m+2}$, представляет собой задачу линейного программирования. Однако интересно получить ее из общих результатов теории антагонистических игр двух лиц, так как при этом становится понятной связь теоремы Куна — Таккера с общими результатами теории игр.

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Phi(h, u) = \int_X F^0(x)\, h(dx) + \sum_{i=1}^{m} u_i \int_X F^i(x)\, h(dx).$$

Пара (h^*, u^*) называется седловой точкой функции $\Phi(h, u)$ в области $\int_X h(dx) = 1$, $u \geqslant 0$, если

$$\Phi(h^*, u) \leqslant \Phi(h^*, u^*) \leqslant \Phi(h, u^*) \qquad (2.33)$$

при всех $h(dx) \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $\int_X h(dx) = 1$.

Как и в конечномерном случае, легко показать, что первая компонента h^* седловой точки (h^*, u^*) обязательно является решением задачи (2.25) — (2.27). Существование же седловой точки функции $\varphi(h, u)$ равносильно существованию оптимальных стратегий в игре двух лиц, которых условимся обозначать через $[X]$, $[U]$, с платежной функцией

$$\varphi(x, u) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i F^i(x)$$

при $x \in X$ (стратегии $[X]$) и $u \geqslant 0$ (стратегии $[U]$).

Пусть ограничения (2.26) таковы, что существует распределение $\tilde{h}(dx)$, $\int_X \tilde{h}(dx) = 1$ и

$$\int_X F^i(x)\, \tilde{h}(dx) < 0, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (2.34)$$

Это условие, очевидно, является обобщением известного условия Слейтера. При этом условии, как и в случае обычного условия Слейтера, множество седловых точек функции Лагранжа $\Phi(h, u)$, если оно существует, ограничено.

Действительно, подставив $\tilde{h}(dx)$ в (2.33), получим (при любом $i = 1, 2, \ldots, m$)

$$\int_X F^0(x)\, h^*(dx) - \int_X F^0(x)\, \tilde{h}(dx) \leqslant u_i^* \int_X F^i(x)\, \tilde{h}(dx).$$

Следовательно,

$$u_i^* \leqslant \frac{\int\limits_X F^0(x)\,h^*(dx) - \int\limits_X F^0(x)\,\tilde{h}(dx)}{\int\limits_X F^i(x)\,\tilde{h}(dx)}.$$

С учетом этих замечаний из теоремы 8 гл. I получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть X состоит из конечного числа элементов и справедливо условие* (2.34). *Функция $h^*(dx)$ является решением задачи* (2.25) — (2.27) *тогда и только тогда, когда существует вектор u^*, при котором (h^*, u^*) является седловой точкой функции Лагранжа $\Phi(h, u)$. При этом распределение $h^*(dx)$ сосредоточено в конечном числе точек множества X.*

Из теоремы 9 гл. I следует такое утверждение:

Теорема 4. *Пусть X — замкнутое ограниченное множество R^n, $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — непрерывные функции. Функция $h^*(dx)$ является решением задачи* (2.25) — (2.27) *тогда и только тогда, когда существует вектор u^*, при котором (h^*, u^*) является седловой точкой функции Лагранжа $\Phi(h, u)$. Распределение $h^*(dx)$ сосредоточено не более чем в $m+1$ точках множества X.*

Таким образом, с переходом к смешанным стратегиям теорема Куна — Таккера оказывается справедливой в широком классе экстремальных задач с невыпуклыми функциями и даже с дискретной допустимой областью.

Нами рассмотрен только тот случай, когда в задаче (2.12) — (2.14) функции $x(\theta)$, $h(\theta, dx)$ не зависели от θ, т. е. задача (2.12) — (2.14) сводилась к задаче вида (2.25) — (2.27). Аналогичные результаты имеют место и в общем случае [37].

§ 2. Параметризация в задачах оперативного стохастического программирования

1. Параметризация решений задач оперативного стохастического программирования является одним из эффективных способов их решения. В общей постановке (2.5) — (2.7) решение $x(\theta)$ задачи оперативного стохастического программирования — произвольная функция, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}$, т. е. значения $x(\theta)$ должны зависеть от тех событий, которые доступны наблюдению. Для практических приложений этого обычно мало. Кроме измеримости относительно некоторой σ-подалгебры, решение $x(\theta)$ должно удовлетворять определенным требованиям реализуемости в рассматриваемой системе принятия решений. Например, если $x(\theta)$ — управляющее воздействие в системе управления объектом, θ — отклонения объекта управления от расчетной траектории, то $x(\theta)$ часто отыскивается не среди всевозможных функций от θ, а только среди линейных функций вида (y, θ), где y — подлежащие определению неизвестные параметры, поскольку принцип управления пропорционально отклонению легко реализовать технически.

Часто учитывается также и то обстоятельство, что поиск $x(\theta)$ в классе измеримых функций связан с большими затратами времени, тогда как решение необходимо принимать чрезвычайно быстро, буквально непосредственно за наблюдением. В связи с этим и применяется параметризация решения $x(\theta)$, т. е. $x(\theta)$ отыскивается в виде некоторой наперед заданной функции $x(\theta) = x(y, \theta) = (x_1(y, \theta), \ldots, x_n(y, \theta))$, определенной с точностью до вектора $y = (y_1, \ldots, y_r)$, значение которого вычисляется по информации о распределении $\mathsf{P}(d\theta)$ до наблюдений над θ. Таким образом, в результате параметризации задача оперативного стохастического программирования сводится к задаче перспективного стохастического программирования.

Характер зависимости $x(y, \theta)$ обычно определяется содержанием конкретной задачи. Иногда можно считать

$$x(y, \theta) = \sum_{k=1}^{r} y_k v_k(\theta),$$

где $v_k(\theta)$ — заданные функции от θ, число r фиксировано или его требуется определить.

Остановимся на некоторых частных случаях.

2. Предположим, что после эксперимента состояние природы становится известным. В этом случае $x(\theta)$, как уже неоднократно отмечалось, естественно выбирать из условия минимума

$$f^0(x, \theta) \tag{2.35}$$

при ограничениях

$$f^i(x, \theta) < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.36}$$

$$x \in X. \tag{2.37}$$

В некоторых случаях такое правило $x(\theta)$ оказывается вполне приемлемым, и здесь может возникнуть только вопрос о том, как при новом θ получить решение $x(\theta)$, не решая снова задачу (2.35) — (2.37), а исправив решение, полученное при старом θ.

Однако не всегда время позволяет решить задачу (2.35) — (2.37) даже в тех случаях, когда (2.35) — (2.37) сводится к задаче линейного программирования: минимизировать (c, x) при условиях $Ax \leqslant b(\theta)$, $x \geqslant 0$.

В таких случаях идея параметризации решения кажется вполне естественной. Например, если наблюдается $b(\theta)$, то можно считать $x(\theta) = Yb(\theta)$, где Y — детерминированная матрица с неизвестными элементами, значения которых определяются до наблюдения $b(\theta)$.

Матрица Y выбирается, например, из условия минимума

$$F^0(Y) = \mathsf{P}\{(c, Yb(\theta)) \geqslant a\}$$

при ограничениях

$$F^i(Y) = \mathsf{P}\{AYb(\theta) \leqslant b(\theta)\} \geqslant p_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где a, p_i — некоторые числа. При этом, если $b(\theta) \geqslant 0$, то элементы Y должны быть неотрицательными: $Y \geqslant 0$.

Если компоненты $b(\theta)$ независимы и распределены по нормальному закону, то полученная задача решается методом, излагаемым в § 4.

3. В работе [79] рассматривалась следующая параметризация решений задач с линейными ограничениями. Пусть требуется минимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\theta) x_j \tag{2.38}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j \leqslant b_i(\theta), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.39}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.40}$$

если решение $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выбирается после наблюдения θ, т. е. x зависит от θ. Рассмотрим числа y_{ij} такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}=1, \quad 0 \leqslant y_{ij} \leqslant 1, \quad i=1, \ldots, m, \quad j=1, \ldots, n, \tag{2.41}$$

и преобразуем (2.38) — (2.40) в n простейших задач минимизации

$$c_j(\theta) x_j \tag{2.42}$$

при условиях

$$a_{ij}(\theta) x_j \leqslant b_i(\theta) y_{ij}, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2.43}$$

$$x_j \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Здесь y_{ij} есть часть «ресурса» i, направленного в j-ю «отрасль», $j=1, \ldots, n$.

Решение этой задачи зависит от θ и набора $y = \{y_{ij},\ i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n\}$, т. е. является некоторой функцией $x(y, \theta)$, и можно рассмотреть задачу минимизации математического ожидания

$$F(y) = \mathrm{M} \sum_{j=1}^{n} c_j(\theta) x_j(y, \theta) \tag{2.45}$$

при условиях (2.41), откуда получим оптимальные значения параметров y_{ij}.

Задача (2.42) — (2.44) является простейшей задачей линейного программирования, и в определенных случаях можно найти функцию распределения величины $\sum c_j(\theta) \times x_j(y, \theta)$, найти функцию $F(y)$ и решить получаемую задачу нелинейного программирования. В тех случаях, когда функцию распределения получить невозможно, для минимизации (2.45) при условиях (2.41) следует применять методы гл. IV для двухэтапных стохастических задач.

Параметризация решения в данном случае есть закон $x(y, \theta)$ — решение простейшей задачи линейного программирования (2.42) — (2.44). Эта параметризация отличается от рассмотренной в п. 2 тем, что закон $x(y, \theta)$ не задан в аналитической форме.

§ 3. Приближенная замена

1. Рассмотрим задачу перспективного стохастического программирования общего вида (2.1) — (2.3) и поставим вопрос о приближенной замене этой задачи детерминированным аналогом. Если существует математическое ожи-

дание $\bar{\theta} = \mathsf{M}\theta$, то часто вместо (2.1) — (2.3) рассматривается задача минимизации

$$f^0(x, \bar{\theta}) \tag{2.46}$$

при условиях

$$f^i(x, \bar{\theta}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.47}$$

$$x \in X, \tag{2.48}$$

причем $\bar{\theta}$ может зависеть от x.

Это — обычная задача нелинейного (в частности, линейного) программирования. Можно ожидать, что при малом «разбросе» значений θ возле $\bar{\theta}$ ее решение должно приближать решение исходной задачи. Если функции линейны относительно θ, то задача (2.46)—(2.48) дает точное решение исходной задачи.

Иногда можно показать, что для $\nu = 0, 1, \ldots, m$

$$F^\nu(x) = \mathsf{M}f^\nu(x, \theta) \leqslant f^\nu(x, \bar{\theta}). \tag{2.49}$$

В этом случае допустимое решение задачи (2.46)—(2.48) является допустимым для задачи (2.1)—(2.3), кроме того,

$$\min F^0(x) \leqslant \min f^0(x, \bar{\theta}). \tag{2.50}$$

В общем же случае отличие решения (2.46)—(2.48) от решения (2.1)—(2.3) может быть весьма существенным, как показывает следующий пример: минимизировать $F(x) = \mathsf{M}(\theta x)^2 + x - 1$, где случайная величина θ принимает с вероятностью 1/2 значения ± 1. Точкой минимума функции $F(x) = x^2 + x - 1$ является $x = -1/2$, в то время как точка минимума функции $(\bar{\theta}x)^2 + x - 1 = x - 1$ есть $x = -\infty$.

Заметим, что указанную замену стохастической задачи детерминированным аналогом (2.46)—(2.48) можно выполнить не всегда. Так, задачу о системе обслуживания, рассмотренную в гл. I, невозможно заменить задачей (2.46)—(2.48), так как для графов общего вида практически невозможно найти $\bar{\theta}$.

2. Пример (задача распределения вооружения). Неравенство Иенсена. Описанный прием приближенной замены стохастической задачи детерминированным аналогом часто применяется в моделях целераспределения, моделях развития систем вооружения [11]. Рассмотрим пример таких задач, в котором выполняются неравенства (2.49), (2.50).

В гл. III монографии [11] изучается следующая задача. Имеется две стороны I и II. Сторона II распоряжается выбором систем вооружения, которые могут атаковать различные объекты (цели) стороны I. Пусть число средств вооружения (измеренное в единицах бюджета) i-й системы равно y_i, причем i-я система может атаковать только i-ю цель. Стоимость i-й цели равна v_i. Сторона I первой наносит удар по системам вооружения стороны II, имея полную информацию о векторе $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Если при этом число средств поражения, использованных против i-й системы, равно x_i, то вероятность поражения одного средства i-й системы

$$p_i = 1 - (1 - \mu_i)^{x_i}, \tag{2.51}$$

где μ_i — вероятность поражения средства i-й системы одним средством нападения. Обозначим через θ_i число оставшихся средств i-й системы вооружения стороны II. Ожидаемый ущерб, который остаточные величины $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ могут причинить целям, равен

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left[1 - (1 - \alpha_i)^{\theta_i}\right],$$

где α_i — вероятность поражения i-цели единичным средством поражения стороны I. Функция $f(\theta)$ явно не зависит от $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Каждая из случайных величин θ_i имеет биномиальное распределение [55], отвечающее появлению θ_i раз события, вероятность которого p_i в последовательности независимых испытаний длины x_i. Чтобы найти общий ожидаемый ущерб, который причинят целям остаточные системы вооружения, требуется $f(\theta)$ усреднить по указанным распределениям вероятности, т. е. найти функцию цели

$$F(x) = \mathrm{M} f(\theta). \tag{2.52}$$

Если a — бюджет, выделенный на развитие систем вооружения стороне I, то эта сторона будет стремиться найти такой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, который минимизирует $F(x)$ при условии

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a, \qquad x_i \geqslant 0, \tag{2.53}$$

В данном случае

$$\bar{\theta} = \mathrm{M}\theta = (\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n),$$

$$\bar{\theta}_i = x_i - x_i\left(1 - (1 - \mu_i)^{y_i}\right) = x_i (1 - \mu_i)^{y_i},$$

поэтому задача (2.46)—(2.48) формулируется так:

Минимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \left[1 - (1 - \alpha_i)^{y_i (1 - \mu_i)^{x_i}}\right] \tag{2.54}$$

при ограничениях (2.53).

Именно в таком виде обычно формулируются задачи целераспределения, задачи развития систем вооружения без обсуждения того, какое отношение они имеют к фактической задаче (2.52)—(2.53).

Чтобы показать, что в задаче (2.52)—(2.53) справедливо неравенство (2.49) и, следовательно, (2.50) достаточно применить следующее важное неравенство.

Неравенство Иенсена [14]. *Пусть η — действительная случайная величина, $r(\eta)$ — непрерывная выпуклая вверх функция одного действительного переменного. Тогда*

$$\mathrm{M}r(\eta) \leqslant r(\mathrm{M}\eta). \tag{2.55}$$

Функция $v_i\left[1 - (1 - \alpha_i)^{\theta_i}\right]$ выпуклая вверх по θ_i, поэтому можно применить указанное неравенство Иенсена.

3. Подмена стохастической задачи (2.1)—(2.3) задачей нелинейного программирования (2.46)—(2.48), в которой случайные параметры заменяются средними значениями, — весьма распространенный прием, с помощью которого получается большинство задач линейного и нелинейного программирования.

Как указывалось, этот прием может привести к грубым ошибкам, хотя в некоторых случаях, как при (2.49), можно получить оценки сверху (2.50).

Ввиду широкой распространенности задач вида (2.46)—(2.48) необходимо детальное исследование даваемых ими приближений (по сравнению с (2.1)—(2.3)).

§ 4. Эквивалентные детерминированные аналоги

В этом параграфе рассмотрим примеры иного рода, в которых задача (2.1)—(2.3) точно сводится к задаче нелинейного программирования.

1. Жесткие ограничения. Пусть требуется минимизировать

$$(c,\ x) \tag{2.56}$$

при условиях

$$\mathsf{P}\{f^i(x,\ \theta)\leqslant 0\}=1,\quad i=1,\ \dots,\ m, \tag{2.57}$$

$$x\in X. \tag{2.58}$$

Иначе говоря, требуется минимизировать (2.56) при условиях

$$f^i(x,\ \theta)\leqslant 0,\quad i=1,\ \dots,\ m, \tag{2.59}$$

$$x\in X, \tag{2.60}$$

где θ должно принадлежать множеству меры 1. Без дополнительных оговорок задача (2.56), (2.59)—(2.60) имеет неоднозначность, поскольку допустимая область может существенно сужаться или расширяться за счет исключения или добавления ограничений, вероятность реализации которых равна 0. Поэтому обычно принято считать, что ограничения (2.59) выполняются при всех $\theta\in\Theta$.

Задача (2.56), (2.59)—(2.60) является задачей нелинейного программирования с конечным (если множество Θ конечное) или бесконечным числом ограничений. Специфическая трудность этой задачи в том, что ограничения (2.59) обычно невозможно выписать для всех $\theta\in\Theta$, даже если Θ — конечное множество. Рассмотрим это более подробно.

Пусть вместо (2.59) — (2.60) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i,\quad i=1,\ \dots,\ m, \tag{2.61}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ \dots,\ n, \tag{2.62}$$

где a_{ij}, b_i — случайные величины, т. е. $\theta=\{a_{ij},\ b_i\}$. Величины a_{ij}, b_i, $i=1,\ \dots,\ m$, вообще говоря, зависимые, область значений параметра θ в данном случае есть некоторая область пространства $R^{m(n+1)}$. Обозначим ее, как и раньше, через Θ. Тогда задача состоит в том, чтобы найти такой вектор $x=(x_1,\ \dots,\ x_n)$, который удовлетворяет ограничениям (2.61)—(2.62) при всевозможных

$$\theta\in\Theta. \tag{2.63}$$

Это задача линейного программирования с переменными коэффициентами [12]. Трудность здесь по сравнению, скажем, с обобщенной задачей Вулфа, в том, что область Θ не задана в явном виде, а имеется только возможность наблюдать элементы θ. Поэтому целесообразно развивать методы, основанные на сочетании идей двойственного симплекс-метода, предназначенного для решения задач с переменным числом ограничений, со случайным выбором ограничений (2.61) путем наблюдения $\theta \in \Theta$.

Заметим, что если величины a_{ij}, b_i независимые, то значения каждой из них принадлежат своей области значений A_{ij}, B_i. Обычно в этом случае можно указать такие числа a_{ij}^+, b_i^-, что

$$a_{ij}^+ = \max_{y \in A_{ij}} y,$$

$$b_i^- = \min_{y \in B_i} y. \tag{2.64}$$

Тогда задача минимизации (2.56) при ограничениях (2.61)—(2.62) равносильна следующей:

Минимизировать (2.56) при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ x_j \leqslant b_i^-, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.65}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.66}$$

Действительно, пусть x^* — решение задачи (2.56), (2.61)—(2.63), а $\bar{x}$ — решение задачи (2.56), (2.65)—(2.66). Так как x^*, в частности, удовлетворяет ограничениям (2.65), то

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j.$$

С другой стороны, $\bar{x}$ удовлетворяет ограничениям (2.62)—(2.64), поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j. \tag{2.67}$$

2. Ограничения по вероятности. Рассмотрим теперь задачу более общего вида:

Максимизировать

$$F^0(x) = \mathsf{P}\{f^0(x, \theta) \leqslant 0\} \tag{2.68}$$

при условиях

$$F^i(x) = \mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\} \geqslant p_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.69}$$

$$x \in X. \tag{2.70}$$

Заметим, что область, высекаемая ограничениями (2.69), даже при линейных по x при каждом θ функциях $f^\nu(x, \theta)$ может оказаться невыпуклой, в то время как область, высекаемая (2.57), при выпуклых вниз по x при каждом θ функциях $f^i(x, \theta)$ является выпуклой.

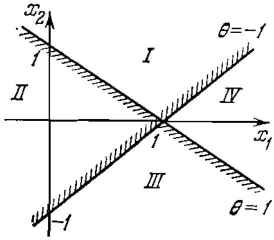

Рис. 5.

Пример. Пусть имеется ограничение

$$\mathsf{P}\{x_1 + \theta x_2 - 1 \leqslant 0\} \geqslant 1/2,$$

где θ принимает с вероятностью 1/2 значения ± 1. Плоскость оказывается разбитой на четыре области. Ограничение выполняется в областях I, II, III, причем в области II — с вероятностью 1.

Предположим, что функции $f^\nu(x, \theta)$ таковы, что $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, можно представить как

$$F^\nu(x) = \mathsf{P}\{g^\nu(x) \leqslant q_\nu(\theta)\}, \tag{2.71}$$

где $g^\nu(x)$ — функция действительных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $q_\nu(\theta)$ — случайные величины, не зависящие от x. Пусть $H_\nu(z)$ — функция распределения величины $q_\nu(\theta)$, т. е.

$$H_\nu(z) = \mathsf{P}\{q_\nu(\theta) < z\}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m.$$

Тогда задача (2.68)—(2.70) равносильна максимизации

$$F^0(x) = 1 - H_0(g^0(x))$$

при условиях

$$F^i(x) = 1 - H_i(g^i(x)) \geqslant p_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x \in X.$$

Поскольку функции $H_\nu(z)$ неубывающие, то эта задача равносильна минимизации

$$g^0(x) \tag{2.72}$$

при условиях

$$g^i(x) \leqslant \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.73}$$

$$x \in X, \tag{2.74}$$

где β_i — наибольшее число β, удовлетворяющее неравенству

$$1 - p_i \geqslant H_i(\beta).$$

Задача (2.72)—(2.74) — обычная задача нелинейного программирования.

Описанный прием иногда применяется и в тех случаях, когда функции $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, не являются суммой двух слагаемых, одно из которых зависит только от x, а второе — только от θ (аддитивная помеха).

Рассмотрим пример. Предположим, что

$$f^\nu(x, \theta) = \sum_{j=1}^{n} a_{\nu j}(\theta)\, x_j - b_\nu(\theta), \tag{2.75}$$

где $a_{\nu j}$, b_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — независимые и нормально распределенные случайные величины.

Обозначим через $m^\nu(x)$ математическое ожидание функции $f^\nu(x, \theta)$, т. е. $\sum_j \bar{a}_{\nu j} x_j - \bar{b}_\nu$, где $\bar{a}_{\nu j} = \mathsf{M} a_{\nu j}$, $\bar{b}_\nu = \mathsf{M} b_\nu$, через $d^\nu(x)$ — ее дисперсию. Рассмотрим случайные величины

$$q_\nu(\theta) = \frac{f^\nu(x, \theta) - m^\nu(x)}{\sqrt{d^\nu(x)}}, \tag{2.76}$$

где предполагается, что $d^\nu(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$.

Так как $a_{\nu j}$, b_ν распределены нормально, то и величина q^ν имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Так как нормальное распределение величины q^ν полностью определено математическим ожиданием и дисперсией, то отсюда следует, что величины q_ν не зависят от искомых переменных x. Так как

$$F^\nu(x) = \mathsf{P}\{f^\nu(x, \theta) \leqslant 0\} = \mathsf{P}\left\{\frac{f^\nu(x, \theta) - m^\nu(x)}{\sqrt{d^\nu(x)}} + \frac{m^\nu(x)}{\sqrt{d^\nu(x)}} \leqslant 0\right\},$$

то в случае (2.75) для функций $F^\nu(x)$ имеет место представление (2.71), где

$$g^\nu(x) = \frac{m^\nu(x)}{\sqrt{d^\nu(x)}},$$

а величины $q_\nu(\theta)$ имеют вид (2.76).

Если имеются ограничения

$$\mathsf{P}\,\{g^i(x) \leqslant q_i(\theta), \quad i=1, \ldots, m\} \geqslant p,$$

где величины $q_i(\theta)$ независимые, то их можно заменить следующими нелинейными ограничениями:

$$g^i(x) - y_i \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - H_i(y_i)) \geqslant p,$$

где $H_i(y) = \mathsf{P}\,\{q_i(\theta) < y\}$.

3. Двухэтапная задача с конечным множеством состояний природы. В том случае, когда множество состояний природы двухэтапной задачи (1.52)—(1.53) конечно, т. е. $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$, и $p_1, \ldots, p_N$ — соответствующие вероятности, эту задачу можно записать в следующем виде:

Найти план x и его коррекции $y = (y^1, \ldots, y^N)$ в состояниях $\theta_1, \ldots, \theta_N$, обращающие в минимум линейную функцию цели

$$(c, x) + \sum_{k=1}^{N} (d^k, y^k)\, p_k \tag{2.77}$$

при условиях

$$\left.\begin{array}{lllll} A(1)\,x + B(1)\,y^1 & & & & = b(1), \\ A(2)\,x + & & + B(2)\,y^2 & & = b(2), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(N)\,x + & & & B(N)\,y^N & = b(N), \end{array}\right\} \tag{2.78}$$

$$x \geqslant 0, \quad y^1 \geqslant 0, \quad y^2 \geqslant 0, \ldots, y^N \geqslant 0. \tag{2.79}$$

Следовательно, задача двухэтапного стохастического программирования сводится к задаче линейного программирования специального (блочного) вида, и здесь можно использовать методы блочного программирования.

Задача (2.77)—(2.79) существенно упрощается для двухэтапных задач транспортного типа со специальной матрицей коррекций, рассмотренной в п. 6 дополнения к гл. I.

Обычная транспортная задача состоит в минимизации линейной функции

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.80}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.81}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.82}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.83}$$

Пусть объемы производства a_i, $i = 1, \ldots, m$, и объемы потребления b_j, $j = 1, \ldots, n$, являются случайными величинами со значениями $a_i^1 < a_i^2 < \ldots < a_i^{r_i}$, $b_j^1 < b_j^2 < \ldots < b_j^{s_j}$, которым отвечают вероятности $\mu_{i1}, \ldots, \mu_{ir_i}$, $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{js_j}$.

В транспортной задаче двухэтапного стохастического программирования требуется найти такой план перевозок $\{x_{ij}\}$, который минимизирует ожидаемые суммарные затраты на его реализацию и коррекцию

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} +$$
$$+ \mathrm{M} \min_{\{v,\, W\}} \left[\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i^+ v_i^+ + \gamma_i^- v_i^-) + \sum_{j=1}^{n} (\delta_j^+ W_j^+ + \delta_j^- W_j^-) \right] \tag{2.84}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + v_i^+ - v_i^- = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.85}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + W_j^+ - W_j^- = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.86}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad v_i^+ \geqslant 0, \quad v_i^- \geqslant 0, \quad W_j^+ \geqslant 0, \quad W_j^- \geqslant 0, \tag{2.87}$$

где γ_i^-, δ_j^- — штрафы за единицу недостающей продукции, γ_i^+, δ_j^+ — штрафы за единицу избыточной продукции.

Эта задача, как легко понять, равносильна следующей транспортной задаче в сетевой форме (с промежуточными пунктами):

Каждому пункту отправления i поставим в соответствие r_i фиктивных поставщиков $i_1, \ldots, i_{r_i}$, а каждому пункту назначения — s_j фиктивных потребителей $j_1, \ldots, j_{s_j}$ так, как это указано на рис. 6.

Объем производства поставщика i_1 равен a_i^1, поставщика i_2 равен $a_i^2 - a_i^1$, поставщика k равен $a_i^k - a_i^{k-1}$ и т. д.; объем потребления потребителя j_1 равен b_j^1, потребителя j_2 равен $b_j^2 - b_j^1$, потребителя l равен $b_j^l - b_j^{l-1}$ и т. д.

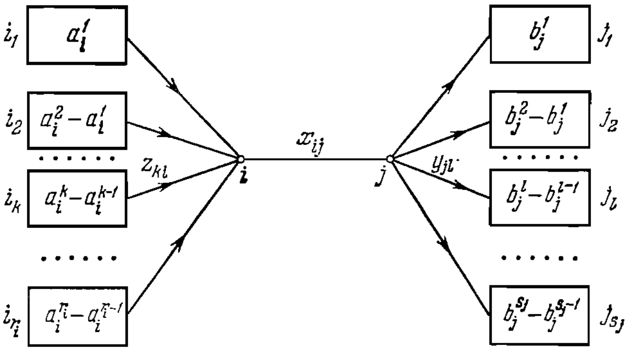

Рис. 6

Объемы поставок z_{ki}, x_{ij}, y_{jl}, $k = i_1, \ldots, i_{r_i}$, $i = 1, \ldots, m$, $l = j_1, \ldots, j_{s_j}$, $j = 1, \ldots, n$, связаны соотношениями

$$\sum_{k=1}^{r_i} z_{ki} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.88}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{l=1}^{s_j} y_{jl} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.89}$$

$$0 \leqslant z_{ki} \leqslant a_i^k - a_i^{k-1} = \pi_{ki}, \tag{2.90}$$

$$0 \leqslant y_{jl} \leqslant b_j^l - b_j^{l-1} = \varkappa_{jl}. \tag{2.91}$$

Величины z_{ki}, y_{jl} в такой интерпретации заменяют величины v_i^+, v_i^-, W_j^+, W_j^-.

План перевозок x_{ij} определяет объемы поставок $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \alpha_i$ и объемы потреблений $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \beta_j$, которые могут быть больше или меньше реализаций случайных величин a_i, b_j. Согласно соотношениям (2.88), (2.89) величины α_i, β_j однозначно определяются выбором величин z_{kl}, y_{jl}.

Обозначим через M_{ik} вероятность того, что величина a_i превысит a_i^k, т. е. $M_{ik} = 1 - \sum_{s=1}^{k} \mu_{is}$; через Λ_{jl} — вероятность того, что величина b_j превысит b_{jl}, $\Lambda_{jl} = 1 - \sum_{s=1}^{l} \lambda_{js}$. Тогда величина $\pi_{ki} - z_{ki}$ с вероятностью M_{ik} равна избытку продукта в пункте i, т. е. $\pi_{ki} - z_{ki} > 0$, и с этим связаны ожидаемые затраты $\gamma_i^+ M_{ik} (\pi_{ki} - z_{ki})$; с вероятностью $1 - M_{ik}$ величина z_{ki} равна недостатку продукта в пункте i, и с этим связаны затраты $\gamma_i^- (1 - M_{ik}) z_{ki}$. Аналогичным образом определяются затраты, связанные с недостатком и избытком продукта в пункте j. Тогда общие затраты в принятой интерпретации можно записать так:

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,k} [\gamma_i^+ M_{ik} (\pi_{ki} - z_{ki}) + \gamma_i^- (1 - M_{ik}) z_{ki}] +$$
$$+ \sum_{j,l} [\delta_j^+ \Lambda_{jl} (\varkappa_{jl} - y_{jl}) + \delta_j^- (1 - \Lambda_{jl}) y_{jl}] =$$
$$= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,k} \gamma_i^+ M_{ik} \pi_{ik} + \sum_{j,l} \delta_j^+ \Lambda_{jl} \varkappa_{jl} +$$
$$+ \sum_{i,k} [(1 - M_{ik}) \gamma_i^- - M_{ik} \gamma_i^+] z_{ki} + \sum_{j,l} [(1 - \Lambda_{jl}) \delta_j^- - \Lambda_{jl} \delta_j^+] y_{jl}.$$

Если отсюда убрать постоянные слагаемые, то можно рассмотреть следующую сетевую транспортную задачу:

Минимизировать линейную функцию

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,k} [(1 - M_{ik}) \gamma_i^- - M_{ik} \gamma_i^+] z_{ki} +$$
$$+ \sum_{j,l} [(1 - \Lambda_{jl}) \delta_j^- - \Lambda_{jl} \delta_j^+] y_{jl} \qquad (2.92)$$

при ограничениях (2.88)—(2.91).

При $\gamma_i^- \geq 0$, $\gamma_i^+ \geq 0$, $\delta_j^- \geq 0$, $\delta_j^+ \geq 0$ величины $[(1 - M_{ik}) \gamma_i^- - M_{ik} \gamma_i^+]$ монотонно возрастают по k, а величины $[(1 - \Lambda_{jl}) \delta_j - \Lambda_{jl} \delta_j]$ монотонно возрастают по l, поэтому, если в решении $z_{ki} > 0$, $y_{jl} > 0$ при некоторых k, l, то $z_{si} > 0$ при $s < k$; $y_{jt} > 0$ при $t < l$. Поэтому сетевая транспортная задача (2.88)—(2.92) будет равносильна исходной двухэтапной задаче (2.84)—(2.87).

Дополнения к главе II

1. Пусть в задаче (2.29)—(2.32) значения функций $F^0(x)$ известны, т. е. смешанные стратегии применяются в обычной задаче нелинейного программирования. Тогда схема решения этой задачи такова.

Фиксируются произвольным образом не менее $m+1$ точек $x^1, \ldots$ $\ldots x^k$, и после этого решается задача линейного программирования (2.29)—(2.32). Пусть также имеется решение двойственной задачи $u_1^0, \ldots, u_{m+1}^0$. Чтобы уменьшить значение функции цели (2.29), необходимо рассмотреть некоторую новую точку x. В результате этого к матрице линейной задачи добавится новый столбец, характеризуемый вектором $(F^0(x), \ldots, F^m(x), 1)$. Точку x следует выбрать так, чтобы при введении нового столбца в старый базис значение линейной формы (2.29) уменьшилось. Поэтому точка x, которую следует рассмотреть, должна удовлетворять неравенству (исходя из теории линейного программирования)

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 F^i(x) + u_{m+1}^0 < -F^0(x).$$

Тогда новая точка x^{k+1} может быть найдена в результате минимизации функции $F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0 F^i(x)$ при условии $x \in X$. После того, как такая точка x^{k+1} будет получена, отыскивается новое решение задачи (2.29)—(2.32), новое решение двойственной задачи и т. д.

Заметим, что получаемое после каждой итерации новое оптимальное решение задачи (2.29)—(2.32) (путем подбора новой точки x) содержит, исходя из симплекс-метода, не более $m+1$ отличных от 0 компонент. Поэтому для реализации предлагаемого метода на каждой итерации достаточно хранить в памяти не более $m+1$ точек x^k.

2. Планирование сельскохозяйственного производства. В качестве примера экономической задачи, которая сводится к задаче стохастического программирования с ограничениями по вероятности, рассмотрим такую модель [67]. Пусть m — число культур; n_i — число сортов культуры i; K — число типов почвы; S_k — площадь земли типа k; R_i — запланированная продукция культуры i; $1-\alpha_i$ — допустимый риск невыполнения плана по культуре i; a_{ijk} — урожайность сорта j культуры i на почве типа k; c_{ijk} издержки на обработку единицы площади типа k для посева сорта j культуры i; $1-\beta$ — допустимый риск, при котором фактические издержки могут превзойти запланированные; x_{ijk} — площадь, занятая сортом j культуры i на земле типа k.

Требуется минимизировать y при условиях

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{k} c_{ijk}x_{ijk} \leqslant y\right\} = \beta,$$

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}x_{ijk} \geqslant R_i\right\} \geqslant \alpha_i, \qquad i=1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ijk} = S_k, \qquad k=1, \ldots, K,$$

где $x_{ijk} \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, K$. Величины c_{ijk}, a_{ijk} предполагаются случайными.

3. Пусть имеется конечное число действий $x \in \{1, \ldots, l\}$, пространство состояний природы содержит конечное число элементов $\theta \in \{1, \ldots, r\}$ с вероятностями $\mu_1, \ldots, \mu_r$, пространство наблюдений совпадает с пространством состояний. Смешанная стратегия характеризуется числами h_{kj}, $k=1, \ldots, r$, $j=1, \ldots, l$.

Минимизировать $\mathsf{M}f^0(x, \theta)$ при условиях

$$\mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\} \geqslant p_i, \qquad i=1, \ldots, m.$$

Рассмотрим множество U_i, $i=1, \ldots, m$, таких пар (k, j), для которых

$$f^i(k, j) \leqslant 0.$$

Пусть $\alpha_{kj} = h_{kj}\mu_k$. Получим задачу:

Найти числа α_{kj}, минимизирующие

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}\alpha_{kj},$$

где $a_{kj} = f^0(k, j)$, при условиях

$$\sum_{U_i} \alpha_{kj} \geqslant p_i, \qquad \sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj} = 1, \qquad j=1, \ldots, l,$$

$$0 \leqslant \alpha_{kj} \leqslant 1, \qquad k=1, \ldots, r, \qquad j=1, \ldots, l.$$

Читателю рекомендуется проанализировать специальные алгоритмы решения этой задачи.

4. Рассмотрим задачу выбора решения $x(\theta)$, минимизирующего математическое ожидание

$$F^0(x(\theta)) = \int f^0(x(\theta), \theta)\,\mathsf{P}(d\theta)$$

при условиях

$$F^i(x(\theta)) = \int f^i(x(\theta), \theta)\,\mathsf{P}(d\theta) \leqslant 0, \qquad i=1, \ldots, m,$$

$$x(\theta) \in X(\theta), \qquad \theta \in \Theta.$$

Если множество состояний природы конечно, т. е. $\theta = 1, \ldots, N$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_N$, получаем задачу нелинейного программирования с большим числом переменных:

Найти совокупность векторов $x(1), \ldots, x(N)$, минимизирующую

$$\sum_{k=1}^{N} f^0(x(k), k)\, p_k \tag{2.93}$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{N} f^i(x(k), k)\, p_k \leqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.94}$$

$$x(k) \in X(k), \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{2.95}$$

В случае

$$f^0(x(k), k) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k)\, x_j(k) \qquad f^i(x(k), k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k)\, x_j(k) - b_i(k),$$

$$X(k) = \{x\colon\ x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$$

можно разработать алгоритм, основанный на модифицированном симплекс-методе с привлечением случайных испытаний.

5. Оценка надежности. В работах по теории надежности [39] встречается следующая задача, которую можно решить методом, рассмотренным в п. 1.

Пусть показатель надежности некоторой системы характеризуется функцией $f(\eta_1, \ldots, \eta_r)$, зависящей от случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_r$, имеющих совместную функцию распределения $H(z_1, \ldots, z_r)$. Известны некоторые моменты величин $\eta_1, \ldots, \eta_r$, например, даны

$$M\eta_1^{l_1} \ldots \eta_r^{l_r} = \int z_1^{l_1} \ldots z_r^{l_r}\, dH(z_1, \ldots, z_r) = m(l_1, \ldots, l_r).$$

Требуется оценить ожидаемую надежность системы в расчете на наихудшее распределение H с заданными моментами.

Ожидаемая надежность есть

$$g(H) = \int f(z_1, \ldots, z_r)\, dH(z_1, \ldots, z_r).$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти такую функцию распределения $H(z_1, \ldots, z_r)$, которая минимизирует $g(H)$ при данных $m(l_1, \ldots, l_r)$.

ГЛАВА III

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КВАЗИГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

В этой главе изучаются общие подходы к решению экстремальных задач, в которых нет точной информации о функциях цели, ограничениях и (или) их производных.

Такое положение, как мы видели, характерно для задач стохастического программирования, но не только для них: градиент $F_x(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ нелинейной функции не вычисляется точно в том случае, когда закон ее изменения задан алгоритмически.

Предлагаемые методы основаны на понятии стохастического квазиградиента — случайного вектора, математическое ожидание которого в некотором смысле близко к градиенту или обобщенному градиенту рассматриваемой функции. Применение этих методов в задачах стохастического программирования рассматривается в следующей главе. В этой главе они применяются в задачах нелинейного программирования большой размерности.

При доказательстве теорем этой главы используются следующие факты:

Неравенство Коши — Буняковского. *Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — произвольные векторы из R^n, (a, b) — их скалярное произведение, т. е. $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $\|a\| = (a, a)^{1/2}$.*

Тогда

$$(a, b) \leqslant \|a\| \|b\|.$$

Лемма 1. *Пусть h_s, $s = 0, 1, \ldots$, — неотрицательные случайные величины, $\mathsf{M}h_s < \infty$, $\mathsf{M}h_s \to 0$ при $s \to$ Тогда существует подпоследовательность $\{h_{s_k}\}$ такая, что $h_{s_k} \to 0$ п.н.*

§ 1. Метод проектирования стохастических квазиградиентов. Стохастические квазифейеровские последовательности

1. Описание метода. Пусть требуется минимизировать выпуклую вниз функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.1}$$

при условиях

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X, \tag{3.2}$$

где множество X выпуклое и замкнутое. Естественно предположить, что в широком классе задач вместо точных значений градиентов или обобщенных градиентов функции $F(x)$ будут известны векторы, являющиеся статистическими оценками этих значений. В стохастических квазиградиентных методах за направление спуска и выбираются такие случайные векторы.

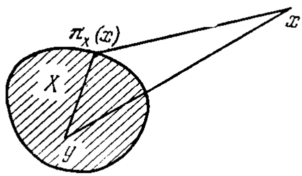

Рис. 7.

Обозначим через $\pi_X(x)$, как и в гл. I, оператор, который ставит в соответствие каждой точке $x \in R^n$ точку $\pi_X(x) \in X$ так, что

$$\|y - \pi_X(x)\| \leqslant \|y - x\| \tag{3.3}$$

для любых $y \in X$. В гл. I он назван оператором проектирования. Как показывает рис. 7, для ограниченного множества X, если точка x находится на значительном расстоянии от X, в качестве $\pi_X(x)$ можно взять произвольную точку множества X; если x находится на близком расстоянии, в качестве $\pi_X(x)$ следует брать ту точку из X, которая находится от x на кратчайшем расстоянии.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — некоторое исходное вероятностное пространство. Рассмотрим последовательность случайных точек $x^s(\omega)$, $s = 0, 1, \ldots$, определенную по формуле

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s), \quad s = 0, 1, \ldots \tag{3.4}$$

Здесь x^0 — произвольная точка, ρ_s — величина шага, γ_s — нормирующий множитель; $\xi^s(\omega)$ — случайный вектор, условное математическое ожидание которого

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = a_s \hat{F}_x(x^s) + b^s, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.5}$$

где a_s — неотрицательная случайная величина, $b^s = (b_1^s, \ldots \ldots, b_n^s)$ — случайный вектор, зависящие от последовательности $(x^0, \ldots, x^s)$ или, более точно, измеримые относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, \ldots, x^s)$. Величины ρ_s, γ_s также измеримы относительно $\mathcal{B}_s$.

Вектор $\hat{F}_x(x^s)$ — обобщенный градиент, т. е. вектор, удовлетворяющий для любых z неравенству

$$F(z) - F(x^s) \geqslant (\hat{F}_x(x^s),\ z - x^s).$$

В дальнейшем будут рассматриваться различные примеры процедуры (3.4)—(3.5). Пока приведем простой пример вектора ξ^s, удовлетворяющего (3.5).

Пусть

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} f^i(x),$$

где $f^i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, — непрерывно дифференцируемые функции, $f_x^i(x)$ — градиент функции $f^i(x)$. Выберем с вероятностью $1/N$ при $x = x^s$ одно из чисел $i = 1, \ldots, N$ и обозначим выбранное число через i_s. Тогда для вектора $\xi^s = f_x^{i_s}(x^s)$ имеем

$$\mathrm{M}(\xi^s/x^s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_x^i(x^s) = \frac{1}{N} F_x(x^s).$$

В этом случае процедуру (3.4) можно интерпретировать так. Функция $F(x)$ состоит из N блоков $f^1(x), \ldots, f^N(x)$. В s-й итерации выбирается с равной вероятностью один из блоков, и в качестве направления спуска выбирается антиградиент, вычисленный только по этому блоку.

2. О сходимости. После того, как предложена определенная процедура поиска решения поставленной задачи, т. е. указано правило построения последовательности $\{x^s\}$, которая должна в некотором смысле сходиться к ее решению, возникает важный вопрос о том, действительно ли это имеет место? (Сходится ли данная процедура?) Процедура (3.4)—(3.5) может сходиться к решению задачи (3.1)—(3.2) в различном смысле, в частности, по вероятности, в среднем квадратичном, с вероятностью 1. Наибольшее практическое значение представляет сходимость

с вероятностью 1, ибо только в этом случае за приближенное решение задачи при достаточно большом s можно принять x^s. Справедливы аналоги теорем 5, 6 гл. I:

Теорема 1. *Пусть для любого числа $L < \infty$ найдется такое число $C_L < \infty$, что*

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/x^0, \ldots, x^s) \leqslant \eta_s^2 \leqslant C_L \text{ при } \|x^k\| \leqslant L, \quad k = 0, 1, \ldots, s;$$

$$\gamma_s > 0, \quad \gamma_s(\eta_s + \tau_s \|x^s\|) \leqslant \text{const},$$

где $\tau_s = 1$ *при* $\|b^s\| \neq 0$, $\tau_s = 0$ *при* $\|b^s\| = 0$; $\rho_s \geqslant 0$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}\, \rho_s \|b^s\| < \infty.$$

Тогда найдется подпоследовательность x^{s_k}, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} F(x^{s_k}) = F(x^*)$ п. н., т. е. $\lim\limits_{s\to\infty} \min\limits_{k \leqslant s} F(x^k) = F(x^*)$ п. н.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям доказанной теоремы множество X^* ограничено. Тогда*

$$\inf_{x^*} \mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 \to 0.$$

Заметим, что условия этой теоремы мало чем отличаются от условий теоремы 5 гл. I. Если их усилить, потребовав сходимости ряда $\sum \mathsf{M}\rho_s^2$, то можно установить, что $\lim x^s \in X^*$ с вероятностью 1. Введем важное для этих целей понятие случайной квазифейеровской последовательности, обобщающее понятие обычной (детерминированной) фейеровской последовательности [17].

3. Случайные квазифейеровские последовательности.

Пусть G — некоторое подмножество пространства R^n. Последовательность $x^s(\omega)$, $s = 0, 1, \ldots$, случайных векторов назовем *случайной квазифейеровской последовательностью относительно множества G*, если для произвольной точки $y \in G$

$$\mathsf{M}(\|y - x^{s+1}\|^2/x^0, \ldots, x^s) \leqslant \|y - x^s\|^2 + W_s, \tag{3.6}$$
$$s = 0, 1, \ldots,$$

где случайные величины $W_s(\omega) \geqslant 0$ являются измеримыми относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной семейством $(x^0, \ldots, x^s)$, и такими, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M} W_s < \infty. \tag{3.7}$$

Заметим, что для существования встречающегося в (3.6) математического ожидания достаточно, чтобы $\mathsf{M}\|x^0\|^2 < \infty$, поэтому всюду в дальнейшем это условие предполагается выполненным.

Следующая теорема отражает основные свойства случайных квазифейеровских последовательностей, которые аналогичны свойствам детерминированных фейеровских последовательностей.

Теорема 3. *Если последовательность случайных величин $x^s(\omega)$ является квазифейеровской относительно множества G, то: 1) для любого $y \in G$ последовательность $\|y - x^s(\omega)\|$ сходится почти при каждом ω; 2) множество предельных точек $\{x^s(\omega)\}$ не пусто почти для каждого ω; 3) если $x'(\omega)$, $x''(\omega)$ — какие-либо предельные точки последовательности $x^s(\omega)$, не принадлежащие G, то G лежит в гиперплоскости, являющейся геометрическим местом точек, равноудаленных от x', x''.*

Доказательство.

а) Для доказательства утверждения 2), очевидно, достаточно доказать 1). Если бы величины W_s не были случайными, то сходимость последовательности $\|y - x^s\|$ непосредственно следовала бы из того, что для величин

$$z_s = \|y - x^s\|^2 + \sum_{k=s}^{\infty} W_k \tag{3.8}$$

в силу (3.6) выполняется неравенство

$$\mathsf{M}(z_{s+1}/z_0, \ldots, z_s) \leqslant z_s, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

т. е. $\{z_s\}$ является супермартингалом.

Доказательство же пункта 1) для случайных W_s следует из теоремы 3 гл. I.

б) Пусть при данном ω величины $\|y - x^s(\omega)\|$ при $s \to \infty$ сходятся. Следовательно, все предельные точки лежат на сфере радиуса $\lim \|y - x^s(\omega)\|$, что возможно только тогда, когда любая точка $y \in G$ лежит в плоскости, являющейся геометрическим местом точек, равноудаленных от $x'(\omega)$, $x''(\omega)$ (из того, что $\|y - x'(\omega)\|^2 =$

$=\|y-x''(\omega)\|^2$, следует, что $2(y, x''-x')+\|x'\|^2-\|x''\|^2=0$).

Следствие 1. *Если последовательность* $x^s(\omega)$ *является случайной квазифейеровской относительно множества* G, *имеющего размерность* n, *то* $\{x^s(\omega)\}$ *имеет единственную предельную точку почти при каждом* ω.

Следствие 2. *Если предельная точка* $x(\omega)$ *последовательности* $x^s(\omega)$ *для некоторого* ω *принадлежит* G, *то* $x(\omega)$ *является единственной предельной точкой при данном* ω.

Доказанная теорема и ее следствия указывают весьма общие условия сходимости с вероятностью 1 последовательности случайных величин к точкам множества G: последовательность должна быть квазифейеровской, и хотя бы одна ее предельная точка с вероятностью 1 должна принадлежать G.

4. Сходимость с вероятностью 1. Вектор ξ^s, удовлетворяющий (3.5), с точностью до a_s, b^s в среднем совпадает с вектором обобщенного градиента. Если $a_s\equiv 1$, $b^s\equiv 0$, то вектор ξ^s естественно назвать *стохастическим обобщенным градиентом* или, для краткости, *стохастическим квазиградиентом*, а процедуру (3.4) — *методом проектирования стохастических квазиградиентов.* При $b^s\neq 0$ условию (3.5) удовлетворяет произвольный случайный вектор, и сохранить эти названия за ξ^s и методом (3.4) в этом случае можно лишь тогда, когда последовательность x^s при $s\to\infty$ сходится к решению задачи (3.1)—(3.2). Обозначим через X^* множество решений задачи (3.1)—(3.2).

Теорема 4. *Пусть* $\eta_s(\omega)$ — *случайная величина, измеримая относительно* σ-*подалгебры* $\mathcal{B}_s$, *индуцированной величинами* $(x^0, \ldots, x^s)$, *такая, что для любого числа* L *и некоторого числа* C_L

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/x^0, \ldots, x^s)\leqslant\eta_s^2\leqslant C_L \tag{3.9}$$

при $\|x^k\|\leqslant L$, $k=0, 1, \ldots, s$; *нормирующий множитель* γ_s *для некоторых чисел* $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$ *удовлетворяет условию*

$$0<\underline{\gamma}\leqslant\gamma_s(\eta_s+\tau_s\|x^s\|)\leqslant\overline{\gamma}<\infty, \tag{3.10}$$

где $\tau_s=1$, *если* $\|b^s\|>0$, $\tau_s=0$, *если* $\|b^s\|=0$; *величины*

ρ_s, a_s, b^s такие, что

$$\rho_s \geqslant 0, \quad a_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s \| b^s \| + \rho_s^2) < \infty. \qquad (3.11)$$

Тогда последовательность точек x^s, $s = 0, 1, \ldots$, $\mathsf{M}\|x^0\|^2 < \infty$, определенная согласно (3.4) — (3.5), *является случайной квазифейеровской относительно множества X^*.*

Если же, кроме того, с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty, \qquad (3.12)$$

то почти для каждого ω последовательность $x^s(\omega)$ сходится к некоторому элементу $x^*(\omega) \in X^*$.

Условия этой теоремы, как будет показано далее, легко проверяется при решении конкретных задач. Здесь только заметим, что

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/\mathscr{B}_s) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_j^s/\mathscr{B}_s) + a_s^2 \|\hat{F}_x(x^s)\|^2 + 2a_s(\hat{F}_x(x^s), b^s) + \|b^s\|^2, \quad (3.13)$$

откуда, например, следует, что если сумма дисперсий $\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_j^s/\mathscr{B}_s)$ компонент вектора $\xi^s = (\xi_1^s, \ldots, \xi_n^s)$ ограничена в X, а также ограничены a_s, $\|\hat{F}_x(x^s)\|$, $\|b^s\|$, то $\eta_s \equiv \mathrm{const}$, т. е. (3.9) выполняется. Справедливость этого условия в реальных задачах обычно является следствием ограниченности области X.

Доказательство.

а) Докажем вначале первую часть теоремы. Пусть $x^* \in X^*$. С учетом свойства (3.3) операции проектирования имеем

$$\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^* - x^s + \rho_s\gamma_s\xi^s\|^2 = \\ = \|x^* - x^s\|^2 + 2\rho_s\gamma_s(\xi^s, x^* - x^s) + \rho_s^2\gamma_s^2\|\xi^s\|^2. \quad (3.14)$$

Возьмем условное математическое ожидание от обеих частей этого неравенства:

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \|x^* - x^s\|^2 + \\ + 2\rho_s\gamma_s a_s(\hat{F}_x(x^s), x^* - x^s) + 2\rho_s\gamma_s(b^s, x^* - x^s) + \\ + \rho_s^2\gamma_s^2 \mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/\mathscr{B}_s). \quad (3.15)$$

Так как $(\hat{F}_x(x^s),\ x^*-x^s)\leqslant 0$, то отсюда, с учетом неравенства Коши — Буняковского и того, что всегда можно предполагать $\gamma_s\leqslant\tilde{\gamma}<\infty$ для некоторого числа $\tilde{\gamma}$ (можно предполагать $\eta_s>\varepsilon>0$), получим

$$\mathsf{M}\,(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)\leqslant\|x^*-x^s\|^2+$$
$$+\,2\rho_s\|b^s\|(\tilde{\gamma}\|x^*\|+\bar{\gamma})+\bar{\gamma}^2\rho_s^2. \tag{3.16}$$

Из этого неравенства и условий (3.11) следует доказательство первой части теоремы.

б) Покажем теперь, что при условии (3.12) одна из предельных точек последовательности $x^s(\omega)$ почти для каждого ω принадлежит множеству X^*. С учетом следствия 2 теоремы 3 отсюда получим доказательство и второй части теоремы.

Из (3.14) имеем

$$\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant\|x^*-x^0\|^2+2\sum_{k=0}^{s}\rho_k\gamma_k\,(\xi^k,\ x^*-x^k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{s}\rho_k^2\gamma_k^2\|\xi^k\|^2. \tag{3.17}$$

После взятия математического ожидания с учетом того, что $\mathsf{M}\,g(k)=\mathsf{M}\mathsf{M}\,(g(k)/\mathscr{B}_k)$, получим

$$\mathsf{M}\,\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{M}\,\|x^*-x^0\|^2+2\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s}\rho_k a_k\gamma_k\,(\hat{F}_x(x^k),\ x^*-x^k)+$$
$$+\,2\,(\tilde{\gamma}\|x^*\|+\bar{\gamma})\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\ \rho_k\|b^k\|+\gamma^2\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k^2.$$

Отсюда следует, что с вероятностью 1

$$\mathsf{M}\|x^*-x^0\|^2+2\,\mathsf{M}\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k a_k\gamma_k\,(\hat{F}_x(x^k),\ x^*-x^k)+$$
$$+\,2\,(\tilde{\gamma}\|x^*\|+\bar{\gamma})\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{M}\,\rho_k\|b^k\|+\bar{\gamma}^2\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{M}\,\rho_k^2\geqslant 0.$$

Тогда с учетом (3.11) получаем, что с вероятностью 1

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k a_k\gamma_k\,(\hat{F}_x(x^k),\ x^*-x^k)>-\infty.$$

Так как $\sum \rho_k a_k = \infty$, то с вероятностью 1

$$\gamma_{s_k}\left(\hat{F}_x(x^{s_k}),\ x^* - x^{s_k}\right) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Почти для каждого ω последовательность $\|x^s(\omega)\|$ ограничена, поэтому из (3.9) и (3.10) следует, что значения $\gamma_k(\omega)$ при $k = 0, 1, \ldots$ ограничены снизу почти для каждого ω. То есть почти для каждого ω для некоторой подпоследовательности, например, для $x^{s_k}(\omega)$

$$\left(\hat{F}_x(x^{s_k}(\omega)),\ x^* - x^{s_k}(\omega)\right) \to 0$$

при $k \to \infty$. Так как $\hat{F}_x(x)$ — обобщенный градиент, то

$$F(x^*) - F(x^{s_k}) \geq \left(\hat{F}_x(x^{s_k}),\ x^* - x^{s_k}\right) \to 0,$$

поэтому из предыдущего соотношения для любой предельной точки x' подпоследовательности x^{s_k} получим $F(x^*) = F(x')$, т. е. $x' \in X^*$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Очевидно, что если область X ограничена, то теорема остается справедливой при $\gamma_s = \text{const}$.

Замечание 2. Теорема будет справедливой также при следующих иногда полезных изменениях: $\|b^s\|$ удовлетворяет условиям, аналогичным (3.9), т. е. $\|b^s\| \leq C_L$ при $\|x^k\| \leq L$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s удовлетворяет условиям

$$0 < \underline{\gamma} \leq \gamma_s \eta_s \leq r_s, \quad \underline{\gamma} \leq \gamma_s (1 + \|x^s\|) \|b^s\| \leq \delta_s, \tag{3.18}$$

где $\underline{\gamma}$ — некоторое число, величины δ_s, r_s измеримы относительно $\mathcal{B}_s$; вместо (3.11) справедливы условия

$$\rho_s \geq 0, \quad a_s \geq 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{M}(\rho_s \delta_s + \rho_s^2 r_s^2) < \infty. \tag{3.19}$$

Это легко понять, анализируя доказательство теоремы.

§ 2. Локальная сходимость

Рассмотрим задачу минимизации непрерывно дифференцируемой, но не обязательно выпуклой вниз функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ при $X = R^n$ и изучим вопрос о сходимости процедуры типа (3.4) — (3.5) к точкам локального минимума $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Прежде всего заметим, что анализ доказательств теорем предыдущего параграфа показывает, что они будут справедливы при любых функциях $F(x)$, для которых существует некоторое подмножество точек минимума X^{**} такое, что $(\hat{F}_x(x), x^* - x) \leqslant 0$ при $x^* \in X^{**}$, $x \overline{\in} X^{**}$.

Так как $X = R^n$ и $F(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то метод (3.4) — (3.5) вырождается в следующий:

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.20}$$

где

$$\mathsf{M}(\xi^s / x^0, \ldots, x^s) = a_s F_x(x^s) + b^s, \tag{3.21}$$

$\mathsf{M}\|x^0\|^2 < \infty$. Не ограничивая общности, предположим, что $F(x) \geqslant 0$. Кроме того, везде будем предполагать, что для каждого числа $L < \infty$ существует число $C_L < \infty$ такое, что $\|F_x(x)\| \leqslant C_L$ при $F(x) \leqslant L$. Предположим также, что градиент $F_x(x)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица: для любых точек x, y

$$\|F_x(x) - F_x(y)\| \leqslant C\|y - x\|, \tag{3.22}$$

где $C = \mathrm{const}$.

Теорема 5. *Пусть $\eta_s(\omega)$ — случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, \ldots, x^s)$, такая, что для любого числа $L < \infty$ и некоторого числа C_L*

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2 / x^0, \ldots, x^s) \leqslant \eta_s^2 \leqslant C_L \tag{3.23}$$

при $F(x^k) \leqslant L$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s \eta_s \leqslant r_s < \infty; \tag{3.24}$$

справедливо условие Липшица (3.22). Кроме того, величины ρ_s, a_s, b^s, r_s измеримы относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$ и такие, что $\rho_s \geqslant 0$, $a_s \geqslant 0$, $\|b^s\|/a_s \to 0$ равномерно с вероятностью 1,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s \|b^s\| + \rho_s^2 r_s^2) < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty \text{ п. н.} \tag{3.25}$$

Тогда последовательность точек $x^s(\omega)$, определенная согласно (3.20) — (3.21), такова, что почти для каждого ω

последовательность $F(x^s)$ *сходится,* $\|F_x(x^{s_k})\|\to 0$ *п. н. при* $k\to\infty$ *для некоторой подпоследовательности* x^{s_k}.

Доказательство. Действительно,

$$F(x^{s+1})-F(x^s)=\int_0^1 F'_\alpha(x^s-\alpha\rho_s\gamma_s\xi^s)\,d\alpha=$$
$$=-\rho_s\gamma_s\int_0^1(F_x(x^s),\ \xi^s)\,d\alpha+\rho_s\gamma_s\int_0^1(F_x(x^s)-$$
$$-F_x(x^s-\alpha\rho_s\gamma_s\xi^s),\ \xi^s)\,d\alpha\leqslant-\rho_s\gamma_s(F_x(x^s),\ \xi^s)+\rho_s^2\gamma_s^2C\|\xi^s\|^2. \tag{3.26}$$

После взятия условного математического ожидания от обеих частей этого неравенства с учетом (3.24) получим для любого β_s

$$\mathsf{M}(F(x^{s+1})/\mathscr{B}_s)\leqslant$$
$$\leqslant F(x^s)+\rho_s\gamma_s a_s\left[-\|F_x(x^s)\|^2+\frac{\|b^s\|}{a_s}\|F_x(x^s)\|\right]+C\rho_s^2r_s^2=$$
$$=F(x^s)+\rho_s\gamma_s a_s\beta_s\left[-\|F_x(x^s)\|^2+\frac{\|b^s\|}{a_s}\|F_x(x^s)\|\right]+$$
$$+\rho_s\gamma_s(1-\beta_s)[-a_s\|F_x(x^s)\|^2+\|b^s\|\|F_x(x^s)\|]+C\rho_s^2r_s^2.$$

Введем множитель β_s так, чтобы

$$\beta_s=\begin{cases}1, & \|F_x(x^s)\|\geqslant Q,\\ 0, & \|F_x(x^s)\|<Q,\end{cases} \tag{3.27}$$

где число $Q>0$. Тогда из предыдущего неравенства для некоторого числа N и $s\geqslant N$ (для простоты $N=0$) получим (с учетом того, что $\gamma_s\leqslant\tilde\gamma$ для некоторого числа $\tilde\gamma$, $\|b^s\|/a_s\to 0$)

$$\mathsf{M}(F(x^{s+1})/\mathscr{B}_s)\leqslant$$
$$\leqslant F(x^s)+\rho_s\gamma_s(1-\beta_s)[-a_s\|F_x(x^s)\|^2+\|b^s\|\|F_x(x^s)\|]+C\rho_s^2r_s^2\leqslant$$
$$\leqslant F(x^s)+Q\rho_s\|b^s\|\,\tilde\gamma+C\rho_s^2r_s^2.$$

Отсюда и из теоремы 2 гл. I следует сходимость последовательности $F(x^s)$. Остается показать, что $\|F_x(x^{s_k})\|\to 0$ с вероятностью 1 для некоторой подпоследовательности x^{s_k}.

Из неравенства (3.26) легко получить, что

$$\mathsf{M}F(x^{s+1}) \leqslant \mathsf{M}F(x^0) - \mathsf{M}\sum_{k=0}^{s} \rho_k \gamma_k a_k \|F_x(x^k)\|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\,\rho_k \gamma_k \|b^k\| \|F_x(x^k)\| + C\sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\rho_k^2 r_k^2.$$

Из сходимости последовательности $F(x^s)$ и сделанного предположения о своеобразной ограниченности $\|F_x(x^s)\|$ следует, что почти при каждом ω значения $\|F_x(x^s(\omega))\|$ равномерно ограничены. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k a_k \gamma_k \|F_x(x^k)\|^2 < \infty.$$

Величины γ_s в силу сходимости $F(x^s)$ равномерно ограничены снизу, а $\sum \rho_s a_s = \infty$ с вероятностью 1, поэтому $\|F_x(x^{s_k})\| \to 0$ п. н. для некоторой $\{x^{s_k}\}$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

Иногда полезным оказывается следующее изменение доказанной теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $a_s \equiv 1$, $d_s(\omega)$ — *случайная величина, измеримая относительно* σ-*подалгебры* $\mathscr{B}_s$, *индуцированной величинами* $(x^0, \ldots, x^s)$, *такая, что для любого числа* L *и некоторого числа* $C_L < \infty$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_j^s / x^0, \ldots, x^s) \leqslant d_s^2 \leqslant C_L \qquad (3.28)$$

при $F(x^k) \leqslant L$, $k = 0, 1, \ldots, s$; *нормирующий множитель* γ_s *удовлетворяет условию*

$$0 < \gamma \leqslant \gamma_s d_s \leqslant r_s < \infty; \qquad (3.29)$$

справедливо условие Липшица (3.22).

Кроме того, величины ρ_s, b^s, r_s *измеримы относительно* σ-*алгебры* $\mathscr{B}_s$ *и такие, что* $\rho_s \geqslant 0$, $\rho_s \to 0$, $\|b^s\| \to 0$ *равномерно с вероятностью* 1 *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s \|b^s\| + \rho_s^2 r_s^2) < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty \qquad (3.30)$$

с вероятностью 1.

Тогда последовательность точек $x^s(\omega)$, *определенная согласно* (3.20) — (3.21), *такова, что почти для каждого* ω *последовательность* $F(x^s)$ *сходится, причем* $\|F_x(x^{s_k})\| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5, поэтому отметим только его основные этапы.

Из (3.26) с учетом (3.13) имеем

$$\mathrm{M}(F(x^{s+1})/\mathscr{B}_s) \leqslant F(x^s) - \rho_s\gamma_s[\|F_x(x^s)\|^2 - (F_x(x^s),\ b^s)] +$$
$$+ \rho_s^2\gamma_s^2\left[\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}(\xi_j^s/\mathscr{B}_s) + \|F_x(x^s)\|^2 + 2(F_x(x^s),\ b^s) + \|b^s\|^2\right].$$

Это можно записать так:

$$\mathrm{M}(F(x^{s+1})/\mathscr{B}_s) \leqslant$$
$$\leqslant F(x^s) + \rho_s\gamma_s\beta_s[\|F_x(x^s)\|(-\|F_x(x^s)\| + \|b^s\|) +$$
$$+ \rho_s\gamma_s(\|F_x(x^s)\| + 2\|b^s\|) + \rho_s\gamma_s\|b^s\|^2] +$$
$$+ \rho_s\gamma_s(1-\beta_s)[-\|F_x(x^s)\|^2 + \|F_x(x^s)\|\|b^s\| + \rho_s\gamma_s(\|F_x(x^s)\|^2 +$$
$$+ 2\|F_x(x^s)\|\|b^s\| + \|b^s\|^2)] + \rho_s^2\gamma_s^2 d_s^2.$$

Пусть β_s определено в соответствии с (3.27). Так как $\gamma_s \leqslant \bar{\gamma}$, $\rho_s \to 0$, $\|b^s\| \to 0$ равномерно с вероятностью 1, то при $\beta_s = 1$ первая квадратная скобка, начиная с некоторого $s = N$ (для простоты $N = 0$), будет неположительной. Поэтому

$$\mathrm{M}(F(x^s)/\mathscr{B}_s) \leqslant F(x^s) + \rho_s\gamma_s(1-\beta_s)[Q\|b^s\| + Q^2 + \|b^s\|^2] + \rho_s^2 r_s^2.$$

Учитывая теорему 2 гл. I и условия данной теоремы, отсюда получаем сходимость последовательности $F(x^s)$ с вероятностью 1. Докажем, что $\|F_x(x^{s_k})\| \to 0$ с вероятностью 1 при $k \to \infty$. Из (3.26) имеем

$$F(x^{s+1}) \leqslant F(x^0) - \sum_{k=0}^{s} \rho_k\gamma_k(F_x(x^k),\ \xi^k) + \sum_{k=0}^{s} \rho_k^2\gamma_k^2\|\xi^k\|^2.$$

Для математического ожидания, получим

$$\mathsf{M}\, F(x^{s+1}) \leqslant \mathsf{M}\, F(x^0) - \mathsf{M} \sum_{k=0}^{s} \rho_k \gamma_k \| F_x(x^k) \|^2 + \\ + \sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\, [\rho_k \gamma_k \| b^k \| \| F_x(x^k) \| + \rho_k^2 \gamma_k^2 \| F_x(x^k) \|^2 + \\ + \rho_k^2 \gamma_k^2 \| F_x(x^k) \| \| b^k \| + \rho_k^2 \gamma_k^2 \| b^k \|^2 + \rho_k^2 r_k^2].$$

Так как $F(x) \geqslant 0$, $\{F(x^s)\}$ сходится с вероятностью 1, то каждое из слагаемых правой части полученного неравенства конечно с вероятностью 1 (с учетом условий теоремы). Поэтому с вероятностью 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \gamma_k \| F_x(x^k) \|^2 < \infty,$$

откуда, как и в предыдущей теореме, получаем, что $\| F_x(x^{s_k}) \| \to 0$ п. н. для некоторой подпоследовательности x^{s_k} при $k \to \infty$.

Следствие. *Если $F(x)$ унимодальна, т. е. имеет только глобальный экстремум и $\| F_x(x) \|$ отлична от 0 во всех точках, за исключением экстремальных, то из теорем 5, 6 следует, что $\{F(x^s)\}$ п. н. сходится к глобальному экстремуму.*

§ 3. Большая размерность. Методы случайного поиска, помехоустойчивость

Полученные в этой главе результаты уже позволяют решать те задачи, которые были рассмотрены в § 4 гл. I. Прежде чем это сделать (гл. IV), рассмотрим простые примеры процесса (3.4) — (3.5), связанные с решением задач нелинейного программирования большой размерности методами случайного поиска.

1. Методы случайного поиска обычно (см., например, [57]) применяются в том случае, когда минимизируемая функция $F(x)$ вычисляется точно, а вместо антиградиента применяются случайные направления. Основные соображения при использовании случайных направлений поиска связаны со следующим.

Пусть функция $F(x)$ имеет ограниченные вторые производные при $x \in X$, но $F(x)$ не имеет простой аналитической природы, которая позволила бы вычислить ее градиенты. В этом случае в градиентном методе вместо градиента $F_x(x^s)$ применяются его разностные аналоги, например:

$$F_x^\Delta(x^s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(x^s + \Delta_s e^j) - F(x^s)}{\Delta_s} e^j,$$

где e^j — орт j-й оси, Δ_s — величина смещения по каждой оси. Тогда на каждой итерации с помощью уже одной и той же подпрограммы требуется вычислить значения функции цели в $(n+1)$-й точке, но здесь возникает вопрос о помехоустойчивости получаемого метода, так как выражение $F_x^\Delta(x^s)$ чрезвычайно чувствительно к ошибкам вычислений. Наряду с этим возникает вопрос о согласованных способах регулировки величинами ρ_s, Δ_s. Как легко понять, отмеченная в теоремах §§ 1, 2 сходимость стохастических процессов отвечает на эти вопросы, но имеется более существенное возражение. Бывают задачи, в которых на вычисление функции цели в одной точке затрачивается значительное время. Если, например, на одно вычисление требуется 0,5 минуты, а $n = 60$, то время вычисления $F_x^\Delta(x^s)$, т. е. одной итерации, составит более 0,5 часа, и градиентный метод с использованием разностного аналога $F_x^\Delta(x^s)$ может оказаться практически неприемлемым.

Для выхода из положения можно вообще отказаться от использования антиградиента, который не является единственным подходящим направлением: любое направление, проекция которого на антиградиент положительна, ведет к убыванию функции цели. Поэтому, если в точке x^s взять случайное направление, то либо это направление, либо противоположное ему обязательно будет подходящим. На этом и основаны многие методы случайного поиска. Оказывается, что широкий класс этих методов можно рассматривать как частный случай метода (3.4) — (3.5).

2. Рассмотрим вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с независимыми и равномерно распределенными на $[-1, 1]$ компонентами

и положим

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{F(x^s + \Delta_s \beta^{sk}) - F(x^s)}{\Delta_s} \beta^{sk}, \tag{3.31}$$

где β^{sk}, $k = 1, \ldots, K_s$, — серия независимых наблюдений вектора β в s-й итерации, причем $K_s \geqslant 1$, $\Delta_s > 0$. Случайные величины K_s, Δ_s всюду предполагаются измеримыми относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, \ldots, x^s)$. Заметим, что если $K_s \equiv 1$, то для вычисления ξ^s требуется вычислить $F(x)$ только в двух точках.

Легко показать, что

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \frac{K_s}{3} F_x(x^s) + v^s \Delta_s, \tag{3.32}$$

где v^s — некоторый случайный вектор, измеримый относительно $\mathscr{B}_s$, причем $\|v^s\| \leqslant \mathrm{const}$.

Действительно, обозначив через $A(x)$ матрицу вторых производных функций $F(x)$ в точке x и расписав $F(x^{s+1})$ по формуле Тейлора, получим для i-й компоненты ξ_i^s вектора ξ^s

$$\xi_i^s = \sum_{k=1}^{K_s} \left[(F_x(x^s),\ \beta^{sk}) + \frac{\Delta_s}{2} \ (A(x^s + \varepsilon \Delta_s \beta^{sk}) \beta^{sk},\ \beta^{sk}) \right] \beta_i^{sk}.$$

Так как компоненты вектора $\beta^{sk} = (\beta_1^{sk}, \ldots, \beta_n^{sk})$ — независимые и равномерно распределенные на $[-1, 1]$ величины, то $\mathsf{M}\beta_i^{sk} = 0$, $\mathsf{M}(\beta_i^{sk})^2 = 1/3$. С учетом того, что β^{sk}, $k = 1, \ldots$ $\ldots, K_s$, — серия независимых наблюдений вектора β, имеем $\mathsf{M}(\xi_i^s/x^s) = \frac{K_s}{3} F_{x_i}(x^s) + \Delta_s \mathsf{M}((A(x^s + \varepsilon \Delta_s \beta^{sk}) \beta^{sk},\ \beta^{sk}) \beta_i^{sk}/x^s)$. Если положить $v_i^s = \mathsf{M}((A(x^s + \varepsilon \Delta_s \beta^{sk}) \beta^{sk},\ \beta^{sk}) \beta_i^{sk}/x^s)$, то отсюда получаем требуемое соотношение (3.32), а то, что $\|v^s\| \leqslant \mathrm{const}$, следует из ограниченности вторых производных $F(x)$.

Следовательно, для минимизации $F(x)$ можно применить метод (3.4) — (3.5), в котором вектор ξ^s вычисляется по формуле (3.31). Так как вторые производные $F(x)$ ограничены, то $\|\xi^s\| \leqslant \mathrm{const}$ и величины ρ_s, Δ_s, K_s следует выбирать так, чтобы $\rho_s \geq 0$, $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s K_s = \infty$ с вероятностью 1, $\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s \Delta_s + \rho_s^2) < \infty$. Величины γ_s достаточно выбрать так, чтобы $\underline{\gamma} \leq \gamma_s \|x^s\| \leq \bar{\gamma}$. В частности, можно взять $\rho_s = 1/s$, $\Delta_s = 1/s$.

3. Предположим, что функция цели $F(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i f_i(x)$, где $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$; $f_i(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Рассмотрим случайную величину α, которая принимает значения $1, 2, \ldots, r$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Пусть α_s — реализация случайной величины α в s-й итерации. Тогда вектор

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{f_{\alpha_s}(x^s + \Delta_s \beta^{sk}) - f_{\alpha_s}(x^s)}{\Delta_s} \beta^{sk}, \tag{3.33}$$

как легко понять, также представляет вектор стохастического квазиградиента рассматриваемой функции $F(x)$ и удовлетворяет соотношению (3.32). Как и в примере, рассмотренном в п. 1 § 1, функция цели здесь также вычисляется как бы с помощью ряда блоков, и при вычислении ξ^s согласно (3.33) вначале делается случайный выбор одного из блоков, а затем вычисляется случайное направление спуска по той информации, которая имеется в выбранном блоке.

Заметим, что формула (3.31) похожа на формулу для $F_x^{\Delta}(x)$, но если на вычисление вектора ξ^s по формуле (3.31) требуются значения функции $F(x)$ в (K_s+1)-й точке, $K_s \geq 0$, то на вычисление вектора $F_s^{\Delta}(x^s)$ всегда требуются значения функции в $(n+1)$-й точке. Поэтому процесс (3.4) с вектором (3.31) может оказаться выгоднее соответствующего детерминированного градиентного метода.

4. Отметим, что пока рассматривались детерминированные задачи, а «стохастика» в направление ξ^s внесена искусственно. В стохастических экстремальных задачах, как будет показано в следующей главе, случайный характер вектора ξ^s может быть связан как со случайной при-

родой самой задачи, так и с искусственными причинами, рассмотренными в этом параграфе. Например, если

$$F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta)$$

и выполнены требования, достаточные для дифференцирования под знаком математического ожидания, то в качестве ξ^s можно брать $f_x(x^s, \theta)$, так как $\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = F_x(x^s)$, или

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{f(x^s + \Delta_s \beta^{sk}, \theta) - f(x^s, \theta)}{\Delta_s} \beta^{sk}.$$

5. Покажем, что принципы выбора случайных направлений, близкие к сформулированным в (3.31), (3.33), можно использовать и при минимизации функций, не имеющих непрерывных производных.

Рассмотрим задачу, которая обсуждалась в § 3 гл. I. Требуется найти точку x, минимизирующую функцию

$$F(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$$

при ограничениях

$$x \in X.$$

Было показано, что вектор

$$f_x(x, y(x)) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{y = y(x)},$$

где вектор $y(x)$ такой, что $f(x, y(x)) = \max\limits_{y \in Y} f(x, y)$, является обобщенным градиентом выпуклой вниз, но негладкой функции $F(x)$ в точке x. Тогда, если снова рассмотреть вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с независимыми и равномерно распределенными на $[-1, 1]$ компонентами и положить

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{f(x^s + \Delta_s \beta^{sk}, y(x^s)) - f(x^s, y(x^s))}{\Delta_s} \beta^{sk}, \qquad (3.34)$$

то в полном соответствии с формулами (3.31), (3.32) получим, что для дважды непрерывно дифференцируемой по x при каждом y функции $f(x, y)$

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \frac{K_s}{3} f_x(x^s, y(x^s)) + v^s \Delta_s = \frac{K_s}{3} \hat{F}_x(x^s) + v^s \Delta_s,$$

где вектор $\|v^s\| \leqslant \text{const}$, если вторые производные по x функции $f(x, y)$ равномерно по $y \in Y$ ограничены в области X. Величины ρ_s, γ_s, K_s, Δ_s можно опять выбирать так, чтобы

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s \|x^s\| \leqslant \bar{\gamma} < \infty, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s|\Delta_s| + \rho_s^2) < \infty,$$

$$\rho_s \geqslant 0, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \infty \text{ п. н.}$$

Аналоги формул (3.31), (3.33), (3.34) справедливы и для стохастических экстремальных задач с ограничениями, которые будут рассматриваться в гл IV.

§ 4. Стохастический метод сокращения невязок

Пусть требуется минимизировать

$$F^0(x)$$

при ограничениях

$$F^i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$x \in X.$$

Рассмотрим своеобразный стохастический вариант градиентного метода Эрроу — Гурвица [64], в котором не делается предположения о точном вычислении функций $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$. Обозначим через $\hat{\varphi}_x(x, u)$ вектор обобщенного градиента функции Лагранжа

$$\varphi(x, u) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i F^i(x)$$

по переменным x при фиксированном $u = (u_1, \ldots, u_m)$, а через $\varphi_u(x, u)$ — градиент этой функции по переменным $u = (u_1, \ldots, u_m)$, который, очевидно, равен $(F^1(x), \ldots, F^m(x))$.

1. Определим последовательность точек (x^s, u^s), исходя из следующих соотношений:

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.35}$$

$$u^{s+1} = \pi_U(u^s + \rho_s \gamma_s \zeta^s), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.36}$$

где (x^0, u^0) — произвольное начальное приближение, ρ_s — величина шага, γ_s — нормирующий множитель, π_U — опетор проектирования на некоторое выпуклое и замкнутое множество U, содержащее компоненты u^* седловых точек (x^*, u^*) функции Лагранжа $\varphi(x, u)$ в области $x \in X$, $u \geqslant 0$ (при условии, что седловая точка существует); ξ^s, ζ^s — случайные векторы такие, что

$$\mathsf{M}(\xi^s/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) = a_s \hat{\varphi}_x (x^s, u^s) + b^s, \qquad (3.37)$$

$$\mathsf{M}(\zeta^s/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) = a_s \varphi_u (x^s, u^s) + d^s, \qquad (3.38)$$

где случайная величина $a_s \geqslant 0$ и случайные векторы b^s, d^s измеримы относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$. Величины ρ_s, γ_s также измеримы относительно $\mathscr{B}_s$.

Процесс (3.35) — (3.36) является стохастическим вариантом градиентного метода Эрроу — Гурвица, т. е. если предположить, что функции $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемые,

$$X = \{x: x \geqslant 0\}, \quad U = \{u: u \geqslant 0\}, \quad \xi^s = \varphi_x (x^s, u^s),$$

$$\zeta^s = \varphi_u (x^s, u^s) = (F^1(x^s), \ldots, F^m(x^s)),$$

то метод (3.25) — (3.26) в точности соответствует методу Эрроу — Гурвица, сходимость которого при $\gamma_s \equiv 1$, $\rho_s \equiv \mathrm{const}$ исследовалась в работе [64]; в работе [27] были указаны иные способы регулирования шага ρ_s при недифференцируемых функциях $F^\nu(x)$.

Предположим, что $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — непрерывные и выпуклые вниз в области X функции; множество X выпуклое и замкнутое; ограничения удовлетворяют условию Слейтера, т. е. функция Лагранжа $\varphi(x, u)$ имеет седловую точку (x^*, u^*) в области $x \in X$, $u \geqslant 0$, причем, как известно (см. гл. I, § 3, п. 3), множество $\{u^*\}$ компонент седловых точек $W = \{(x^*, u^*)\}$ ограничено.

Теорема 7. *Пусть функция $F^0(x)$ строго выпуклая, η_s — случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной величинами $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$, такая, что*

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2 + \|\zeta^s\|^2/(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)) \leqslant \eta_s^2 \leqslant C_L < \infty \qquad (3.39)$$

при $\|x^k\| + \|u^k\| \leqslant L < \infty$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s для некоторых чисел $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s (\eta_s + \tau_s \|x^s\| + \vartheta_s \|u^s\|) \leqslant \bar{\gamma} < \infty, \qquad (3.40)$$

где $\tau_s=1$ *при* $\|b^s\|>0$ *и* $\tau_s=0$ *при* $\|b^s\|=0$; $\vartheta_s=1$ *при* $\|d^s\|>0$ *и* $\vartheta_s=0$ *при* $\|d^s\|=0$; *величины* ρ_s, a_s, b^s, d^s *такие, что*

$$\rho_s\geqslant 0,\quad a_s\geqslant 0,\quad \sum_{s=0}^{\infty}\mathsf{M}\,(\rho_s\|b^s\|+\rho_s\|d^s\|+\rho_s^2)<\infty. \tag{3.41}$$

Тогда последовательность точек (x^s, u^s), $s=0, 1, \ldots$, $\mathsf{M}\,(\|x^0\|^2+\|u^0\|^2)<\infty$, *определенная согласно* (3.35) — (3.38), *является случайной квазифейеровской относительно множества седловых точек* W.

Если же, кроме того, с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s a_s=\infty, \tag{3.42}$$

то с вероятностью 1 *одна из предельных точек последовательности* x^s *принадлежит* X^*, *то есть п. н.*

$$\lim_{s\to\infty}\min_{0\leqslant k\leqslant s}F^0(x^k)=F^0(x^*),\quad x^*\in X^*.$$

Доказательство.

а) Докажем первую часть теоремы. Легко видеть, что

$$\|x^*-x^{s+1}\|^2+\|u^*-u^{s+1}\|^2\leqslant\|x^*-x^s\|^2+$$
$$+\|u^*-u^s\|^2+2\rho_s a_s\gamma_s\,[(\xi^s,\ x^*-x^s)-(\zeta^s,\ u^*-u^s)]+$$
$$+\rho_s^2\gamma_s^2\,(\|\xi^s\|^2+\|\zeta^s\|^2). \tag{3.43}$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства математическое ожидание при условии $(x^0, u^0), \ldots, (x^s, u^s)$ или $\mathscr{B}_s$:

$$\mathsf{M}\,(\|x^*-x^{s+1}\|^2+\|u^*-u^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)\leqslant\|x^*-x^s\|^2+\|u^*-u^s\|^2+$$
$$+2\rho_s a_s\gamma_s\left[\left(\hat\varphi_x(x^s,\ u^s),\ x^*-x^s\right)-\left(\varphi_u(x^s,\ u^s),\ u^*-u^s\right)\right]+$$
$$+2\rho_s\gamma_s\,[(b^s, x^*-x^s)+(d^s, u^*-u^s)]+\rho_s^2\gamma_s^2\mathsf{M}\,(\|\xi^s\|^2+\|\zeta^s\|^2/\mathscr{B}_s).$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi(x, u)$ *при любом* $u\geqslant 0$ *строго выпуклая вниз, то справедливо неравенство*

$$\left(\hat\varphi_x(x,\ u),\ x^*-x\right)-\left(\varphi_u(x,\ u),\ u^*-u\right)<$$
$$<\varphi(x^*,\ u)-\varphi(x,\ u^*)\leqslant 0 \tag{3.44}$$

для любых $x\in X$, $x\neq x^*$, $u\geqslant 0$, Доказательство. Действительно, при $x \in X$, $x \neq x^*$, $u \geqslant 0$

$$\varphi(x^*, u) - \varphi(x, u) > (\hat{\varphi}_x(x, u), x^* - x).$$

Кроме того, при $x \in X$, $u \geqslant 0$

$$\varphi(x^*, u) \leqslant \varphi(x^*, u^*) \leqslant \varphi(x, u^*),$$
$$\varphi(x, u^*) - \varphi(x, u) = (\varphi_n(x, u), u^* - u).$$

Следовательно, при $x \in X$, $x \neq x^*$, $u \geqslant 0$

$$0 \geqslant \varphi(x^*, u) - \varphi(x, u^*) =$$
$$= \varphi(x^*, u) - \varphi(x, u) + \varphi(x, u) - \varphi(x, u^*) >$$
$$> (\hat{\varphi}_x(x, u), x^* - x) - (\varphi_u(x, u), u^* - u),$$

что и требовалось доказать.

С учетом полученного неравенства доказательство теоремы 7 мало чем отличается от доказательства теоремы 4.

Из (3.44) с учетом неравенства Коши — Буняковского и того, что всегда можно предполагать $\gamma_s \leqslant \tilde{\gamma} < \infty$ для некоторого числа $\tilde{\gamma}$, получим

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2 + \|u^* - u^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \|x^* - x^s\|^2 + \|u^* - u^s\|^2 +$$
$$+ 2\rho_s(\|b^s\| + \|d^s\|)[\tilde{\gamma}(\|x^*\| + \|u^*\|) + \bar{\gamma}] + \bar{\gamma}^2\rho_s^2,$$

т. е. последовательность (x^s, u^s), если учесть условие (3.41), действительно является квазифейеровской.

б) Из (3.43) имеем

$$\|x^* - x^{s+1}\|^2 + \|u^* - u^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^* - x^0\|^2 + \|u^* - u^0\|^2 +$$
$$+ 2\sum_{k=0}^{s} \rho_k a_k \gamma_k [(\xi^k, x^* - x^k) - (\zeta^k, x^* - x^k)] + \sum_{k=0}^{s} \rho_k^2 \gamma_k^2 \|\xi^k\|^2,$$

откуда следует, что

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2 + \|u^* - u^{s+1}\|^2) \leqslant \mathsf{M}(\|x^* - x^0\|^2 +$$
$$+ \|u^* - u^0\|^2) + 2[\tilde{\gamma}(\|x^*\| + \|u^*\|) + \bar{\gamma}] \sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\rho_k(\|b^k\| + \|d^k\|) +$$
$$+ \gamma \sum_{k=0}^{s} \mathsf{M}\rho_k^{\cdot} + 2\,\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s} \rho_k a_k \gamma_k [(\hat{\varphi}_x(x^k, u^k), x^* - x^k) -$$
$$- (\varphi_u(x^k, u^k), u^* - u^k)].$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s \gamma_s \left[\left(\hat{\varphi}_x (x^s,\ u^s),\ x^* - x^s \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\varphi_u (x^s,\ u^s),\ u^* - u^s \right) \right] > -\infty.$$

Так как $\sum \rho_s a_s = \infty$, то $\gamma_{s_k} \left[\left(\hat{\varphi}_x (x^{s_k},\ u^{s_k}),\ x^* - x^{s_k} \right) - \right.$ $\left. - \left(\varphi_u (x^{s_k},\ u^{s_k}),\ u^* - u^{s_k} \right) \right] \to 0$ с вероятностью 1 при $k \to \infty$. По доказанному в а), последовательность $\{\| x^s (\omega) \| + \| u^s (\omega) \|\}$ ограничена почти для каждого ω, поэтому значение $\gamma_s (\omega)$ с учетом (3.39), (3.40) при $s = 0, 1, \ldots$ ограничены снизу почти для каждого ω. То есть для некоторой подпоследовательности, например, для $(x^{s_k},\ u^{s_k})$ с вероятностью 1

$$\left(\hat{\varphi}_x (x^{s_k},\ u^{s_k}),\ x^* - x^{s_k} \right) - \left(\varphi_u (x^{s_k},\ u^{s_k}),\ u^* - u^{s_k} \right) \to 0$$

при $k \to \infty$. Так как последовательность $\{\| x^* - x^s \|^2 + \| u^* - u^s \|^2\}$ сходится с вероятностью 1, т. е. последовательность $\{x^s\}$ ограничена, то отсюда с учетом леммы 2 следует, что существует подпоследовательность, пусть это будет x^{s_k}, для которой $\lim x^{s_k} \in X^*$ при $k \to \infty$.

Замечание 1. Эта теорема позволяет находить экстремальное значение функции $F^0 (x)$ при условии, что ее значения вычисляются точно, а точные значения ограничений могут быть неизвестны. Очевидно, к такому случаю легко сводится задача с произвольной функцией цели введением дополнительной переменной x_{n+1} и ограничения $F^0 (x) \leqslant x_{n+1}$, при котором минимизация $F^0 (x)$ заменяется минимизацией x_{n+1}.

Замечание 2. Анализ доказательства теоремы показывает, что она остается справедливой при следующих изменениях:

Предположим, что $\| b^s \| + \| d^s \| \leqslant C_L$ при $\| x^k \| + \| u^k \| \leqslant L$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s удовлетворяет условиям

$$0 < \underline{\gamma} \leqslant \gamma_s \eta_s \leqslant r_s < \infty,$$

$$\underline{\gamma} \leqslant (1 + \| x^s \|) \| b^s \| + (1 + \| u^s \|) \| d^s \| \leqslant \delta_s,$$

где $\underline{\gamma}$ — некоторое число; величины r_s, δ_s измеримы относительно $\mathscr{B}_s$; вместо (3.41) справедливы условия

$$\rho_s \geqslant 0, \quad a_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s\delta_s + \rho_s^2 r_s^2) < \infty. \tag{3.45}$$

2. Рассмотрим пример вектора ξ^s, удовлетворяющего (3.37), в связи с решением экстремальной задачи методами случайного поиска.

Предположим, что функции $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, вычисляются точно. Тогда в качестве ζ^s в (3.36) можно взять вектор $(F^1(x^s), \ldots, F^m(x^s))$. Пусть $\varphi(x, u)$ имеет по x вторые производные, ограниченные в области $x \in X$, $u \in U$. Как и в соотношениях (3.31), рассмотрим вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и положим

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{\varphi(x^s + \Delta_s\beta^{sk}, u^s) - \varphi(x^s, u^s)}{\Delta_s}\beta^{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Исходя из (3.32), очевидно, что

$$\mathsf{M}(\xi^s/(x^s, u^s)) = \frac{K_s}{3}\varphi_x(x^s, u^s) + v^s\Delta_s,$$

где $\|v^s\| \leqslant \mathrm{const}$. Поэтому, чтобы с таким ξ^s организовать процедуру (3.35)—(3.38), следует взять

$$\zeta^s = \frac{K_s}{3}(F^1(x^s), \; F^m(x^s)).$$

§ 5. Решение систем неравенств

1. Вопросы решения экстремальных задач тесно переплетаются с вопросами решения систем неравенств. Благодаря признакам оптимальности экстремальная задача сводится [64] к решению систем неравенств. С другой стороны, и решение систем неравенств легко сводится к решению экстремальных задач.

Например, пусть требуется найти решение системы неравенств

$$f^i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.46}$$

при условии

$$x \in X. \tag{3.47}$$

Тогда точка минимума в области X функции $F(x) = \max\limits_{1\leq i\leq m} f^i(x)$ или $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} [f^i(x)]^2$ будет удовлетворять (3.46)—(3.47).

При решении систем неравенств, как и при решении экстремальных задач, также бывают различные случаи информируемости о функциях $f^i(x)$. В тех случаях, когда значения $f^i(x)$ вычисляются с ошибками, можно рассмотреть одну из указанных выше функций $F(x)$ и минимизировать ее методами, предложенными далее в гл. V для сложных функций регрессии.

2. Рассмотрим тот случай, когда значения $f^i(x)$ вычисляются точно. Если не делать предположения о гладком характере ограничений, то в этом случае всегда можно ограничиться только одним неравенством, т. е. поиском точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей соотношению $f(x) \leq 0$ в области X, где $f(x)$ — некоторая заданная функция, например $f(x) = \max\limits_i f^i(x)$. Как уже отмечалось, поиск решения неравенств легко сводится к экстремальной задаче, тем не менее эти вопросы следует изучать особо, поскольку имеется специфика, связанная с тем, что минимизацию следует проводить лишь до тех пор, пока не будут удовлетворены неравенства. Кроме того, важная особенность экстремальных задач, возникающая при решении неравенств, состоит в том, что при этом бывают известными экстремальные значения функции цели. Например, если требуется решать систему уравнений

$$f^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

то минимум функции $f(x) = \max\limits_i |f^i(x)|$ равен 0.

Пусть $f(x)$ — такая функция, что множество $A = \{x : f(x) \leq 0\}$ выпуклое замкнутое, множество X выпуклое и замкнутое, причем такое, что $A \cap X \neq \varnothing$. Как и прежде, обозначим через π_X операцию проектирования на область X.

Рассмотрим случайную последовательность точек x^s, $s = 0, 1, \ldots$, заданную (при произвольном $x^0 \in R^n$, $\mathbf{M}\|x^0\|^2 < \infty$) соотношением

$$x^{s+1} = \begin{cases} \pi_X(x^s - \rho_s\gamma_s f(x^s)\xi^s), & f(x^s) > 0, \\ x^s, & f(x^s) \leq 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Здесь ρ_s — величина шага, γ_s — некоторый нормирующий множитель, ξ^s — случайный вектор, условное математическое ожидание которого

$$\mathbf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = a_s g(x^s) + b^s, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{3.49}$$

где a_s — случайная величина, $b^s = (b_1^s, \ldots, b_n^s)$ — случайный вектор, измеримые относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, \ldots, x^s)$; величины ρ_s, γ_s также измеримы относительно $\mathcal{B}_s$; $g(x^s)$ — вектор, для которого полупространство, отвечающее неравенству

$$(g(x),\ z - x) + f(x) \leqslant 0, \tag{3.50}$$

при $x = x^s$ содержит множество A, если $x^s \in A$.

Предлагаемый процесс (3.48)—(3.50) обобщает релаксационный метод Моцкина [75] для решения систем линейных неравенств, а также методы работы [15] на тот случай, когда значение вектора $g(x^s)$, удовлетворяющего неравенству (3.50), невозможно вычислить без ошибок. В процессах вида (3.48)—(3.50) на каждой итерации происходит движение, направленное некоторым случайным образом к сокращению (ослаблению) погрешности решения x^s, поэтому эти процессы можно называть *стохастическими релаксационными методами*. Впервые они рассматривались в работе [30].

Отметим, что если $f(x) = \max_i f^i(x) = f^{i(x)}(x)$, где функции $f^i(x)$ выпуклые вниз и непрерывно дифференцируемые, $i(x)$ — индекс, на котором достигается $\max_i f^i(x)$ при заданном x, то вектор $g(x) = f_x^i(x)\big|_{i=i(x)}$, как легко убедиться, удовлетворяет неравенству (3.50).

Теорема 8. *Пусть η_s — случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной совокупностью величин $(x^0, \ldots, x^s)$, такая, что для любого числа L найдется число C_L, для которого*

$$\mathbf{M}(\|\xi^s\|^2/x^0, \ldots, x^s) \leqslant \eta_s^2 \leqslant C_L, \tag{3.51}$$

как только $\|x^k\| \leqslant L$, $k = 0, 1, \ldots, s$; нормирующий множитель γ_s удовлетворяет условию

$$\gamma_s[\tau_s(\|x^s\| + 1) f(x^s) + \eta_s^2] = 1, \tag{3.52}$$

где $\tau_s=1$, *если* $\|b^s\|>0$, *и* $\tau_s=0$, *если* $\|b^s\|=0$; *величины* ε_s, ρ_s, a_s, b^s *такие, что*

$$0\leqslant\rho_s\leqslant 2a_s-\varepsilon_s,\quad a_s\geqslant 0,\quad \varepsilon_s\geqslant 0,$$
$$\sum_{s=0}^{\infty}\mathsf{M}\rho_s\|b^s\|<\infty. \tag{3.53}$$

Тогда случайная последовательность x^s, $s=0, 1, \ldots$, $\mathsf{M}\|x^0\|^2<\infty$, *определенная согласно* (3.48)—(3.50), *является случайной квазифейеровской относительно множества* $A\cap X$. *Если же, кроме того, с вероятностью* 1

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s\varepsilon_s=\infty, \tag{3.54}$$

то она сходится к некоторому элементу множества $A\cap X$ *почти наверное.*

Доказательство.

а) Покажем, что последовательность x^s является случайной квазифейеровской. Пусть $x^*\in A\cap X$. Если $x^s\overline{\in} A$, то $\|x^*-x^{s+1}\|^2=\|x^*-x^s\|^2$. Если $x^s\in A$, то

$$\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant\|x^*-x^s\|^2+$$
$$+2\rho_s\gamma_s f(x^s)(\xi^s,\ x^*-x^s)+\rho_s^2\gamma_s^2 f^2(x^s)\|\xi^s\|^2. \tag{3.55}$$

Взяв от обеих частей этого неравенства условное математическое ожидание, получим

$$\mathsf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)\leqslant$$
$$\leqslant\|x^*-x^s\|^2+2\rho_s a_s\gamma_s f(x^s)(g(x^s),\quad x^*-x^s)+$$
$$+2\rho_s\gamma_s f(x^s)(b^s,\ x^*-x^s)+\rho_s^2\gamma_s^2 f^2(x^s)\,\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/\mathscr{B}_s).$$

Так как $(g(x^s),\ x^*-x^s)\leqslant -f(x^s)$, $|(b^s,\ x^*-x^s)|\leqslant\leqslant\|b^s\|(\|x^*\|+\|x^s\|)$ и выполняется (3.52), то имеем (для некоторой постоянной C)

$$\mathsf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)\leqslant\|x^*-x^s\|^2+(\rho_s^2-2\rho_s a_s)\gamma_s f^2(x^s)+$$
$$+C\rho_s\|b^s\|\leqslant\|x^*-x^s\|^2+C\rho_s\|b^s\|. \tag{3.56}$$

Следовательно, точки x^s удовлетворяют основному неравенству для квазифейеровских последовательностей.

б) Пусть выполнено условие (3.54). Поскольку π_X — оператор проектирования, то из (3.55) легко получить неравенство

$$\mathsf{M}\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{M}\|x^*-x^0\|^2+\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s}(\rho_k^2-2\rho_k a_k)\gamma_k f^2(x^k)+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k\|b^k\|\leqslant$$

$$\leqslant\mathsf{M}\|x^*-x^0\|^2-\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s}\rho_k\varepsilon_k\gamma_k f^2(x^k)+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k\|b^k\|.$$

С учетом (3.53) отсюда следует, что с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s\varepsilon_s\gamma_s f^2(x^s)>-\infty.$$

Так как $\sum\rho_s\varepsilon_s=\infty$, то получаем, что $\gamma_{s_k}f^2(x^{s_k})\to 0$ с вероятностью 1. Так как последовательность $x^s(\omega)$ является случайной квазифейеровской, то последовательность $\|x^s\|$ п. н. ограничена, поэтому из (3.51)—(3.52) следует, что значения γ_s, $s=0, 1, \ldots$, с вероятностью 1 ограничены снизу. То есть $f^2(x^{s_k})\to 0$ с вероятностью 1 при $k\to\infty$, если последовательность x^s бесконечна. Отсюда следует, что одна из предельных точек последовательности x^s п. н. принадлежит $A\cap X$. Поэтому с учетом свойств случайных квазифейеровских последовательностей и вся последовательность x^s с вероятностью 1 сходится к некоторому элементу множества $A\cap X$.

Отметим, что в доказанной теореме по сравнению с теоремами предыдущих параграфов более слабыми являются условия регулирования величинами ρ_s.

3. Примеры.

1. Пусть в замкнутой и выпуклой области X требуется решить неравенство

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r}c_i f^i(x)\leqslant 0,$$

где числа $c_i\geqslant 0$, $f^i(x)$ — выпуклые вниз и непрерывные в X функции. Обозначим через α случайную величину, принимающую значения $i=1, \ldots, r$ с вероятностью $p_i=$ $=c_i/\sum c_i$, α_s — реализация этой величины в s-й момент времени (в s-й итерации). Тогда вектор

$$\xi^s = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right) \hat{f}_x^{\alpha_s}(x^s), \tag{3.57}$$

как легко понять, удовлетворяет соотношениям (3.49), (3.50) при $a_s \equiv 1$, $b^s \equiv 0$, поскольку

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \sum_{i=1}^{r} c_i \hat{f}_x^i(x^s),$$

и вектор $g(x^s) = \sum_{i=1}^{r} c_i \hat{f}_x^i(x^s)$ удовлетворяет неравенству (3.50) для рассматриваемой функции $f(x)$.

2. Пусть теперь требуется решить в замкнутой и выпуклой области X неравенство

$$f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} f^i(x) \leqslant 0,$$

где функции $f^i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, — выпуклые вниз и дважды непрерывно дифференцируемые. Тогда вектор

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{f^{i_s}(x^s + \Delta_s \beta^{sk}) - f^{i_s}(x^s)}{\Delta_s} \beta^{sk}, \tag{3.58}$$

где величины β^{sk}, Δ_s, K_s имеют тот же смысл, что и в § 3, i_s таково, что $f^{i_s}(x^s) = \max_i f^i(x^s)$, удовлетворяет в соответствии с (3.32) соотношению

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \frac{K_s}{3} f_x^{i_s}(x^s) + v^s \Delta_s,$$

где v^s — некоторый вектор.

Вектор $g(x^s) = f_x^{i_s}(x^s)$, как легко убедиться, удовлетворяет неравенству (3.50) для рассматриваемой функции $f(x) = \max f^i(x)$. Отсюда следует, что вектор ξ^s, определенный согласно (3.58), удовлетворяет соотношениям (3.49), (3.50) при $a_s = K_s/3$, $b^s = v^s \Delta_s$.

4. Пусть имеется неравенство

$$F(x) \leqslant 0,$$

которое требуется решить в области X, но точное значение $F(x)$ неизвестно. Тогда метод (3.48) естественно видоизменить, полагая $x^{s+1}=\pi_X(x^s-\rho_s\gamma_s\chi_s\xi^s)$, где случайная величина χ_s и вектор ξ^s независимые и такие, что

$$\mathsf{M}(\chi_s/x^0,\ldots,x^s)=F(x^s),\qquad \mathsf{M}(\xi^s/x^0,\ldots,x^s)=a_sg(x^s)+b^s,$$

a_s, b^s, $g(x^s)$ имеют тот же смысл, что и в (3.49).

Теорема 9. *Пусть η_s — случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, такая, что*

$$\mathsf{M}(\chi_s^2\|\xi^s\|^2/x^0,\ldots,x^s)\leqslant\eta_s^2\leqslant C_L$$

при $\|x^k\|\leqslant L$, $k=0,1,\ldots,s$. Множитель γ_s удовлетворяет условию

$$\underline{\gamma}\leqslant\gamma_s(\tau_s(\|x^s\|+1)F(x^s)+\eta_s^2)\leqslant\bar{\gamma},$$

где $\tau_s=1$, если $\|b^s\|>0$; $\tau_s=0$, если $\|b^s\|=0$. Величины ρ_s, a_s, b^s измеримы относительно $\mathscr{B}_s$ и такие, что

$$\rho_s\geqslant 0,\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\mathsf{M}(\rho_s\|b^s\|+\rho_s^2)<\infty.$$

Тогда последовательность x^s, $s=0,1,\ldots$, $\mathsf{M}\|x^0\|^2<\infty$, является случайной квазифейеровской относительно множества $A\cap X$. Если же, кроме того,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho_sa_s=\infty\quad п.\,н.,$$

то она сходится к элементу множества $A\cap X$ с вероятностью 1.

Доказательство. Наметим только схему доказательства, так как оно носит стандартный характер.

а) Для произвольного решения x^* имеем

$$\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant\|x^*-x^s\|^2+2\rho_s\gamma_s\chi_s(\xi^s,x^*-x^s)+\rho_s^2\gamma_s^2\chi_s^2\|\xi^s\|^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)&\leqslant\\ &\leqslant\|x^*-x^s\|^2+2\rho_sa_s\gamma_sF(x^s)(g(x^s),\ x^*-x^s)+\\ &\qquad+2\rho_s\gamma_sF(x^s)(b^s,\ x^*-x^s)+\rho_s^2\gamma_s^2\mathsf{M}(\chi_s^2\|\xi^s\|^2/\mathscr{B}_s).\end{aligned}$$

Так как $(g(x^s),\ x^*-x^s)\leqslant -F(x^s)$, то с учетом выбора x^s

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)&\leqslant\\ &\leqslant\|x^*-x^s\|^2-2\rho_sa_s\gamma_sF^2(x^s)+C\rho_s\|b^s\|+C\rho_s^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathsf{M}\,(\|x^* - x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \|x^* - x^s\|^2 + C\rho_s\|b^s\| + C\rho_s^2,$$

т. е. последовательность x^s — случайная квазифейеровская.

б) Пусть $\sum \rho_s a_s = \infty$. Тогда легко получить неравенство

$$\mathsf{M}\,\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \mathsf{M}\,\|x^* - x^0\|^2 - 2\,\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s} \rho_k a_k \gamma_k F^2(x^k) + \\ + C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\,\rho_k\|b^k\| + C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\,\rho_k^2.$$

Отсюда следует, что с вероятностью 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k a_k \gamma_k F^2(x^k) < \infty,$$

откуда получаем $F(x^{s_k}) \to 0$ для некоторой подпоследовательности x^{s_k} при $k \to \infty$.

В силу того, что $\{x^s\}$ случайная квазифейеровская, то последовательность x^s сходится к элементу множества $A \cap X$.

5. Пример. Пусть требуется решить неравенство

$$F(x) = \mathsf{M} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} f^i(x, \theta) \leqslant 0,$$

где функции $f^i(x, \theta)$ выпуклые вниз при каждом θ и непрерывно дифференцируемые по x.

Если θ^{s1}, θ^{s2} — независимые наблюдения состояния θ,

$$\chi_s = \max_i f^i(x^s, \theta^{s1}),$$

$$\xi^s = f_x^{i_s}(x^s, \theta^{s2}),$$

где i_s удовлетворяет соотношению $f^{i_s}(x^s, \theta^{s2}) = \max_i f^i(x^s, \theta^{s2})$, то легко проверить, что χ_s, ξ^s удовлетворяют условиям теоремы 9, причем $a_s \equiv 1$, $\|b^s\| \equiv 0$ (см. § 2 гл. IV). Более общие системы решаются методами гл. V.

§ 6. Об одном методе поиска экстремума

Пусть X и A — выпуклые и замкнутые множества пространства R^n, $A=\{x: f(x)\leqslant 0\}$, $A\cap X\neq\varnothing$.

Рассмотрим задачу минимизации выпуклой вниз функции

$$F(x) \tag{3.59}$$

при условии, что

$$f(x)\leqslant 0, \tag{3.60}$$

$$x\in X. \tag{3.61}$$

Обозначим через X^* множество решений этой задачи. Определим случайную последовательность точек x^s, $s=0, 1, \ldots$, при произвольном $x^0\in R^n$, $\mathsf{M}\|x^0\|^2<\infty$, соотношениями

$$x^{s+1}=\begin{cases}\pi_X(x^s-\delta_s\beta_s f(x^s)\zeta^s-\rho_s\gamma_s\xi^s), & f(x^s)>0, \quad (3.62)\\ \pi_X(x^s-\rho_s\gamma_s\xi^s), & f(x^s)\leqslant 0, \quad (3.63)\end{cases}$$

где δ_s, ρ_s — величины шагов; β_s, γ_s — нормирующие множители; ξ^s — случайный вектор, условное математическое ожидание которого

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s)=a_s\hat{F}_x(x^s)+b^s, \quad s=0, 1, \ldots; \tag{3.64}$$

ζ^s — случайный вектор с условным математическим ожиданием

$$\mathsf{M}(\zeta^s/x^0, \ldots, x^s)=c_s g(x^s)+d^s, \quad s=0, 1, \ldots \tag{3.65}$$

Здесь a_s, c_s — неотрицательные случайные величины; b^s, d^s — случайные векторы; $\hat{F}_x(x^s)$ — вектор обобщенного градиента функции $F(x)$; $g(x^s)$ — вектор, удовлетворяющий (3.50). Величины ρ_s, δ_s, β_s, γ_s, a_s, c_s, а также векторы b^s, d^s предполагаются измеримыми относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной семейством случайных величин $(x^0, \ldots, x^s)$.

Таким образом, метод (3.62)—(3.65) сочетает в себе идеи метода (3.4) и (3.48).

Теорема 10. *Пусть η_s — случайная величина, измеримая относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, такая, что для любого числа $L<\infty$ найдется число C_L, для которого*

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2+\|\zeta^s\|^2/x^0, \ldots, x^s)\leqslant\eta_s^2\leqslant C_L, \tag{3.66}$$

как только $\|x^k\| \leqslant L$, $k=0, 1, \ldots, s$; *для некоторых чисел* γ, $\bar{\gamma}$ *нормирующие множители* β_s, γ_s *удовлетворяют условиям*

$$\beta_s [f(x^s)(\tau_1(s)\|x^s\|+1)+\eta_s]=1, \tag{3.67}$$

$$\gamma \leqslant \gamma_s(\tau_2(s)\|x^s\|+\eta_s^2) \leqslant \bar{\gamma}, \tag{3.68}$$

где $\tau_1(s)=1$, *если* $\|d^s\|>0$, $\tau_1(s)=0$, *если* $\|d^s\|=0$, *и* $\tau_2(s)=1$, *если* $\|b^s\|>0$, $\tau_2(s)=0$, *если* $\|b^s\|=0$; *величины* $\rho_s \geqslant 0$, δ_s, c_s, b^s, d^s *такие, что*

$$\rho_s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \delta_s \leqslant 2c_s-\varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \geqslant 0, \quad a_s \geqslant 0, \quad c_s \geqslant 0, \tag{3.69}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{M}(\rho_s\|b^s\|+\rho_s^2+\rho_s\delta_s+\delta_s\|d^s\|)<\infty. \tag{3.70}$$

Тогда случайная последовательность x^s, $s=0, 1, \ldots$, $\mathbf{M}\|x^0\|^2<\infty$, *определенная согласно* (3.62)—(3.65), *является случайной квазифейеровской относительно множества* X^*.

Если же, кроме того, с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s\varepsilon_s=\infty, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s=\infty, \tag{3.71}$$

то она сходится к некоторому элементу X^* *п. н.*

Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство теорем 4 и 9.

а) Имеем

$$\begin{aligned} \|x^*-x^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^*-x^s\|^2+2\delta_s\beta_s f(x^s)(\zeta^s,\ x^*-x^s)+ \\ +2\rho_s\gamma_s(\xi^s,\ x^*-x^s)+\delta_s^2\beta_s^2 f^2(x^s)\|\zeta^s\|^2+ \\ +2\rho_s\delta_s\beta_s\gamma_s f(x^s)(\xi^s,\ \zeta^s)+\rho_s^2\gamma_s^2\|\xi^s\|^2. \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathcal{B}_s) \leqslant \\ \leqslant \|x^*-x^s\|^2+2\delta_s c_s\beta_s f(x^s)(g(x^s),\ x^*-x^s)+ \\ +2\delta_s\beta_s f(x^s)(d^s,\ x^*-x^s)+2\rho_s a_s\gamma_s(\hat{F}_x(x^s),\ x^*-x^s)+ \\ +2\rho_s\gamma_s(b^s,\ x^*-x^s)+\delta_s^2\beta_s^2 f^2(x^s)+ \\ +2\rho_s\delta_s\beta_s\gamma_s f(x^s)\eta_s^2+\rho_s^2\gamma_s^2\eta_s^2. \end{aligned}$$

Так как всегда можно полагать, что $\beta_s+\gamma_s\leqslant\tilde\gamma<\infty$, где $\tilde\gamma$ — некоторое число, $(g(x^s),\ x^*-x^s)\leqslant -f(x^s)$, то имеем (для некоторой постоянной C)

$$\begin{aligned}\mathsf{M}(\|x^*-x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s)\leqslant\|x^*-x^s\|^2+(\delta_s^2-2\delta_s c_s)\gamma_s f^2(x^s)+\\+2\rho_s\gamma_s a_s\left(\hat F_x(x^s),\ x^*-x^s\right)+C\delta_s\|d^s\|+C\rho_s\|b^s\|+\\+2\tilde\gamma\rho_s\delta_s+C\rho_s^2,\end{aligned}\tag{3.73}$$

откуда непосредственно следует доказательство первой части теоремы.

б) Из неравенства (3.72) получаем

$$\begin{aligned}\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant\|x^*-x^0\|^2+2\sum_{k=0}^{s}\delta_k\beta_k f(x^k)(\zeta^k,\ x^*-x^k)+\\+2\sum_{k=0}^{s}\rho_k\gamma_k(\xi^k,\ x^*-x^k)+\sum_{k=0}^{s}\delta_k^2\beta_k^2 f^2(x^k)\|\zeta^k\|^2+\\+2\sum_{k=0}^{s}\rho_k\gamma_k\beta_k f(x^k)(\xi^k,\ \zeta^k)+\sum_{k=0}^{s}\rho_k^2\gamma_k^2\|\xi^k\|^2.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить неравенство

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\|x^*-x^{s+1}\|^2\leqslant\mathsf{M}\|x^*-x^0\|^2-\\-\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s}\delta_k\varepsilon_k\beta_k f^2(x^k)+2\,\mathsf{M}\sum_{k=0}^{s}\rho_k a_k\gamma_k\left(\tilde F_x(x^k),\ x^*-x^k\right)+\\+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\,\delta_k\|d^k\|+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k\|b^k\|+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k\delta_k+C\sum_{k=0}^{s}\mathsf{M}\rho_k^2.\end{aligned}$$

Следовательно, с вероятностью 1

$$\sum_{s=0}^{\infty}\delta_s\varepsilon_s\beta_s f^2(x^s)<\infty,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s a_s\gamma_s\left(\hat F_x(x^s),\ x^*-x^s\right)>-\infty.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 9, получаем, что последовательность x^s с вероятностью 1 сходится к некоторому элементу множества $A\cap X$. Подобно доказательству теоремы 4 отсюда следует, что с вероятностью 1

$$\left(\hat{F}_x\left(x^{s_k}\right),\ x^* - x^{s_k}\right) \to 0$$

при $k \to \infty$. Поэтому последовательность x^s с вероятностью 1 сходится к некоторому элементу множества X^*, что и требовалось доказать.

§ 7. Скорость сходимости. Устойчивость методов нелинейного программирования

1. Если есть какая-либо задача и метод ее решения, то естественным образом возникает вопрос: как быстро этот метод решает данную задачу, или какова скорость его сходимости?

Понятие скорости сходимости — весьма обобщенная характеристика. Она зависит от количества вычислений и величины смещения на каждом шаге, устойчивости к ошибкам вычислений. Бывают методы, в которых движение к экстремуму на каждой итерации теоретически происходит с большим шагом, но из-за неустойчивости к ошибкам округления фактическое движение может происходить не в ту сторону. Например, по симплекс-методу движение к решению происходит от вершины к вершине с помощью эквивалентных преобразований матрицы ограничений. Однако если число шагов (преобразований) значительно, то за счет влияния ошибок округления могут получаться матрицы, не эквивалентные исходной, т. е. появляются решения, недопустимые для исходной задачи.

Из предыдущих параграфов этой главы следует, что градиентные методы с малым шагом оказываются устойчивыми к случайным помехам, причем устойчивость обеспечивается именно за счет малого шага — за небольшое число итераций процесс как бы не уходит из одной точки, а направление спуска усредняется (фильтруется). Крупный шаг смещения на каждой итерации и устойчивость — чаще всего противоречивые требования, и пока нет работ, в которых учитывалось бы одновременное действие указанных факторов и оценивалась реальная скорость сходимости. Основным критерием оценки скорости сходимости, который в настоящее время анализируется, является асимптотическое поведение расстояния $\|x^* - x^s\|$ (при больших s) вблизи решения x^*. При этом используются такие понятия, как *линейная*, *квадратичная*, *геометрическая скорости сходимости*.

2. Пусть $x^s \to x^*$ при $s \to \infty$,

$$\|x^* - x^{s+1}\| \leqslant C\|x^* - x^s\|^\alpha.$$

Принято считать, что если $\alpha = 1$, то *скорость сходимости линейная*; если $\alpha = 2$ — *квадратичная*; если $\alpha < 1$ — *геометрическая*.

Иногда удается доказать, что

$$\|x^* - x^{s+1}\| \leqslant c_s\|x^* - x^s\|,$$

где $c_s \to 0$, $s \to \infty$. В этом случае скорость сходимости называется *сверхлинейной*. Считается тот метод лучше, для которого показатель α больше.

Следует подчеркнуть скорее теоретический, чем практический интерес таких оценок.

Прежде всего, они начинают действовать вблизи решения, когда $\|x^* - x^s\| < 1$. Если, например, $n = 100$, то отсюда следует, что указанные оценки начинают себя проявлять тогда, когда по каждой переменной, грубо говоря, достигнуто приближение порядка 0,01. Кроме того, указанные выше оценки обычно являются оценками, полученными в расчете на наихудший случай. Бывают методы, которые эффективно работают, за исключением некоторых паталогических случаев, редко встречающихся, но за счет которых гарантированные оценки оказываются плохими. Так, в симплекс-методе гарантированные оценки фактической скорости сходимости приводят к совершенно безнадежным выводам даже для тех задач, в которых он с успехом применяется. При решении экстремальных задач с помехами, когда применяются методы, не использующие точную информацию о функции цели и ее производных, асимптотическое поведение $\|x^* - x^s\|$ при $s \to \infty$ должно быть хуже, чем для задач с полной информацией. Чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить тот случай, когда за начальное приближение выбрано решение $x^* \in X^*$. Остановимся на некоторых оценках асимптотического поведения $\|x^* - x^s\|$ для стохастических квазиградиентных методов, которые в ряде случаев оказываются сопоставимыми с оценками обычных детерминированных методов. Приводимые ниже результаты необходимо рассматривать только как иллюстрацию тех результатов, которые при этом могут быть получены.

3. Оценка среднего. В п. 1 § 4 гл. I говорилось о том, что оценка среднего значения $M\eta$ случайной величины η по наблюдениям $\eta_1, \eta_2, \ldots$ равносильна решению задачи минимизации функции $F(x) = M(\eta - x)^2$. Пусть η может принимать только два значения 0 и 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$. Для минимизации $F(x)$ применим метод (3.20), положив $\xi^s = -2(\eta_{s+1} - x_s)$, для которого $M(\xi^s/x^s) = F_x(x^s)$. Поскольку в данном случае дисперсия $D(\xi^s/x^s) = \sqrt{pq}$, т. е. ограничена, можно воспользоваться теоремой 6, из которой следует, что достаточно взять $\gamma_s \equiv 1$. Тогда метод (3.20) отвечает следующей рекуррентной процедуре оценки $M\eta$:

$$x_{s+1} = x_s + 2\rho_s(\eta_{s+1} - x_s), \quad s = 0, 1, \ldots$$

Если $x_0 = 0$, $\rho_s = \frac{1}{2(s+1)}$, то имеем известную формулу оценки $M\eta$:

$$x_{s+1} = \left(1 - \frac{1}{s+1}\right) x_s + \frac{1}{s+1} \eta_{s+1} = \frac{1}{s+1} \sum_{k=1}^{s+1} \eta_k.$$

Поведение $|x^* - x_s| = |M\eta - x_s|$ в данном случае можно оценить из неравенства Чебышева

$$P\{|x^* - x_s| > CDx_s\} \leq \frac{1}{C^2}.$$

Так как $Mx^s = x^*$, $Dx_s = \sqrt{pq/s}$, то

$$P\left\{|x^* - x_s| > C\sqrt{\frac{pq}{s}}\right\} \leq \frac{1}{C^2},$$

т. е. можно сказать, что практически $|x^* - x_s|$ является величиной порядка не ниже, чем $\sqrt{s}$.

4. Пусть

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \xi^s), \quad s = 0, 1, \ldots,$$
$$M(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = a_s \hat{F}_x(x^s) + b^s,$$

где $M\|x^0\|^2 < \infty$.

Теорема 11. *Пусть существую г такие постоянные B, C, что*

$$F(x) \geq F(x^*) + B\|x^* - x\|^2$$

при $x \in X$ и с вероятностью 1

$$\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/x^0, \ldots, x^s) \leqslant C.$$

Кроме того, величины ρ_s детерминированные,

$$a_s \geqslant a > 0, \quad \|b^s\| \leqslant r_s, \quad r_s \leqslant \rho_s, \quad r_s < r < 2Ba.$$

Тогда существует такое число $c_s \leqslant \mathrm{const}$, что при $\rho_s = c_s/s$ последовательность x^s с вероятностью 1 сходится к единственному решению x^*, причем

$$\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, легко получить неравенство

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \|x^* - x^s\|^2 + 2\rho_s a(\hat{F}_x(x^s), x^* - x^s) + \\ + 2\rho_s\|b^s\|\,\|x^* - x^s\| + C\rho_s^2.$$

Так как $F(x^*) - F(x^s) \geqslant (\hat{F}_x(x^s), x^* - x^s)$, то

$$(\hat{F}_x(x^s), x^* - x^s) \leqslant -B\|x^* - x^s\|^2,$$

поэтому

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \\ \leqslant \|x^* - x^s\|^2 - 2\rho_s Ba\|x^* - x^s\|^2 + 2\rho_s r_s\|x^* - x^s\| + C\rho_s^2.$$

Учитывая, что $\|x^* - x^s\| \leqslant \frac{1}{2}(1 + \|x^* - x^s\|^2)$, $\rho_s \geqslant r_s$, получаем

$$\mathsf{M}(\|x^* - x^{s+1}\|^2/\mathscr{B}_s) \leqslant \\ \leqslant \|x^* - x^s\|^2 - 2\rho_s Ba\|x^* - x^s\|^2 + \rho_s^2 + \rho_s r_s\|x^* - x^s\|^2 + C\rho_s^2 = \\ = \|x^* - x^s\|^2 - \rho_s(2Ba - r_s)\|x^* - x^s\|^2 + (1 + C)\rho_s^2.$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 - \rho_s(2Ba - r)\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 + (1 + C)\rho_s^2.$$

Если взять $\rho_s = \dfrac{2Ba - r}{2(1 + C)}\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2$, $s = 0, 1, \ldots$, то получим

$$\mathsf{M}\|x^* - x^{s+1}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 - \frac{(2Ba - r)^2}{4(C + 1)}(\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2)^2, \quad s = 0, 1, \ldots$$

Далее воспользуемся следующим фактом:

Лемма 3. *Пусть a_s — последовательность положительных чисел таких, что $a_s - a_{s+1} \geqslant La_s^l$, где $1 < l < \infty$, L — некоторая положительная постоянная. Тогда $a_s = O\left(\frac{1}{s^{1/(l-1)}}\right)$.*

Доказательство. Для доказательства этой леммы (см. [13]) следует взять $a_s = \frac{c_s}{s^{1/(l-1)}}$ и показать, что последовательность c_s ограничена.

В силу указанной леммы имеем $\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 = O(1/s)$, поэтому ρ_s можно представить как $\rho_s = c_s/s$ для некоторого $c_s \leqslant \text{const}$. В таком случае из теоремы 4 непосредственно следует, что последовательность x^s является квазифейеровской относительно точки x^*, и поэтому $\{\|x^* - x^s\|\}$ сходится с вероятностью 1. Так как $\mathsf{M}\|x^* - x^s\|^2 = O(1/s)$, то найдется подпоследовательность x^{s_k}, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x^{s_k} = x^*$. В силу того, что x^s — случайная квазифейеровская последовательность, и $\lim\limits_{s\to\infty} x^s = x^*$.

5. В теореме 11 предполагалось, что величины ρ_s являются детерминированными, не зависящими от конкретной траектории спуска. Описанная регулировка величинами ρ_s рассчитана сразу на все семейство случайных траекторий, ведущих из начальной точки в точку экстремума, поэтому от нее нельзя ожидать высокой скорости сходимости. Тем не менее полученная оценка вполне согласуется с оценками для детерминированного метода проекции градиента, имеющимися в [13] (имеет тот же порядок).

Если величину ρ_s поставить в зависимость от предыстории $(x^0, \ldots, x^s)$ процесса поиска, то при определенных предположениях скорость сходимости этого процесса можно значительно увеличить. Некоторые эвристические приемы выбора ρ_s в конкретных расчетах будут указаны в следующей главе.

ГЛАВА IV

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этой главе будет показано, что вероятностная природа функций цели и ограничений задач стохастического программирования позволяет естественным образом строить стохастические квазиградиенты ξ^s и получать прямые методы, общая идея которых обсуждалась в § 3 гл. I. Рассматриваются в основном задачи перспективного стохастического программирования, поскольку задачи оперативного стохастического программирования обычно сводятся к ним путем параметризации.

Чтобы не отвлекаться деталями, не имеющими прямого отношения к численным методам, всюду предполагаются выполненными условия, достаточные для измеримости встречающихся выражений, интегрируемости, перехода к пределу и дифференцируемости по параметру под знаком математического ожидания.

§ 1. Метод стохастической аппроксимации

1. Метод стохастической аппроксимации является одним из первых прямых методов стохастического программирования. Решаемая этим методом задача занимает в стохастическом программировании примерно такое же положение, как классическая задача на безусловный экстремум в нелинейном программировании. Впервые он был предложен в работе [77] для поиска во всем пространстве корня функции регрессии

$$F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} z \mathsf{P}(x, dz), \tag{4.1}$$

где $\mathsf{P}(x, z) = \mathsf{P}\{f(x, \theta) < z\}$. Так как через необходимые признаки экстремума это связано с задачами максимизации (минимизации), то в работе [74] были предложены подобные процедуры для максимизации или минимизации $F(x)$ во всем пространстве.

По внешнему виду метод стохастической аппроксимации напоминает классические процедуры поиска корня или экстремума, с тем только отличием, что в этом методе операции над значениями рассматриваемой функции $F(x)$ заменены аналогичными операциями над случайными величинами $f(x, \theta)$.

Рассмотрим метод стохастической аппроксимации, предложенный для минимизации функции регрессии $F(x)$. Метод определяется соотношениями

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^s + \Delta_s e^j, \theta^{sj}) - f(x^s, \theta^{s0})}{\Delta_s} e^j, \qquad (4.2)$$

где e^j — орт j-й оси; $\theta^{0\nu}, \theta^{1\nu}, \ldots, \theta^{s\nu}, \ldots, \nu = 0, 1, \ldots, n,$ — независимые серии наблюдений над θ. При этом можно считать, что $\theta^{s0} = \theta^{s1} = \ldots = \theta^{sn} = \theta^s$; ρ_s — длина шага спуска; Δ_s — величина смещения (пробного шага) по осям координат.

Со сходимостью процедур стохастической аппроксимации вида (4.2), с их разнообразнейшими приложениями и возможными обобщениями можно детально познакомиться, например, по обширным и содержательным монографиям [4], [47], [61].

Заметим только, что сходимость метода стохастической аппроксимации (4.2) обычно исследуется в предположении, что функция $F(x)$ имеет непрерывные и ограниченные вторые производные, дисперсия $\mathrm{D}f(x, \theta) \leqslant \mathrm{const}$ *), функция $F(x)$ имеет единственный экстремум и, грубо говоря, является строго выпуклой. Легко показать, что при этих предположениях

$$\mathrm{M}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^s + \Delta_s e^j, \theta^{sj}) - f(x^s, \theta^{s0})}{\Delta_s} e^j / x^s\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{F(x^s + \Delta_s e^j) - F(x^s)}{\Delta_s} e^j = F_x(x^s) + v^s \Delta_s, \qquad (4.3)$$

где v^s — некоторый вектор, причем $\|v^s\| \leqslant \mathrm{const}$. То есть метод (4.2) является частным случаем стохастического

*) Или имеет порядок роста x^2.

квазиградиентного метода (3.20) — (3.21) при

$$\xi^s = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x^s + \Delta_s e^j, \theta^{sj}) - f(x^s, \theta^{s0})}{\Delta_s} e^j. \qquad (4.4)$$

Так как дисперсия величин $f(x, \theta)$ ограничена, то существует такое число C, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mathsf{D}(\xi_j^s / x^s) \leqslant \frac{C}{\Delta_s^2};$$

поэтому для получения различных способов выбора величин ρ_s, Δ_s в процедуре (4.2), обеспечивающих ее сходимость, можно воспользоваться теоремой 6 гл. III. Заметим, что в (4.2), в отличие от общей процедуры (3.20), $\gamma_s \equiv 1$. Для сходимости (4.2) предложен следующий способ выбора ρ_s, Δ_s: они должны быть детерминированными, причем

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \left[\rho_s |\Delta_s| + \frac{\rho_s^2}{\Delta_s^2} \right] < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty.$$

Это, очевидно, непосредственно следует из (3.30) при $\gamma_s \equiv 1$, $r_s = 1/\Delta_s$. Если в (4.2) ввести γ_s, то из (3.29)—(3.30) следует, что можно взять $\gamma_s = \Delta_s$, а ρ_s, Δ_s выбирать так, чтобы

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} [\rho_s |\Delta_s| + \rho_s^2] < \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty.$$

Если воспользоваться другими теоремами гл. III, то можно получить различные обобщения процедуры (4.2).

2. Существенные требования, которые обычно используются при обосновании процедуры (4.2), связаны с существованием и ограниченностью во всем пространстве вторых производных $F(x)$, ограниченностью дисперсии величины $f(x, \theta)$. Первое требование при наличии выпуклости равносильно тому, что $F(x)$ является функцией, близкой к квадратической, а второе требование означает, что помеха в минимизируемой функции, грубо говоря, аддитивна, т. е. $f(x, \theta)$ является суммой двух слагаемых, первое из которых зависит от x, а второе — от θ. Ни одно

из этих требований не выполнено в задачах, рассмотренных в § 4 гл. I, поэтому их невозможно решить методом (4.2).

Например, дисперсия линейной функции со случайными коэффициентами неограничена во всем пространстве, так как $D\alpha x = x^2 D\alpha$. В большинстве методов гл. III благодаря операции проектирования на область X требование ограниченности дисперсии во всем пространстве можно заменить ее ограниченностью в области X или совсем отказаться от этого требования, выбрав соответствующим образом нормирующий множитель γ_s. Кроме того, эти методы позволяют минимизировать негладкие функции с общими нелинейными ограничениями. Именно негладкий характер функции цели является характерной особенностью примеров, которые были сформулированы в § 4 гл. I.

3. Применяя стохастический метод сокращения невязок (3.35)—(3.36), легко получить непосредственное обобщение процедуры (4.2) на задачу с ограничениями.

Пусть требуется минимизировать функцию регрессии

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta)$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta), \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in X,$$

где функции $F^\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, и область X удовлетворяют условиям теоремы 7 гл. III. Кроме того, пусть функции $F^\nu(x)$ имеют ограниченные в области X вторые производные. Положим

$$\varphi(x, u, \theta) = f^0(x, \theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x, \theta),$$

$$\Phi(x, u) = \mathsf{M}\varphi(x, u, \theta), \quad f = (f^1, \ldots, f^m).$$

Тогда процедура стохастического метода сокращения невязок применительно к данной задаче, как легко понять, имеет вид

$$x^{s+1} = \pi_X\left(x^s - \rho_s\gamma_s \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(x^s + \Delta_s e^j, u^s, \theta^{sj}) - \varphi(x^s, u^s, \theta^{s0})}{\Delta_s} e^j\right),$$

$$u^{s+1} = \pi_U(u^s + \rho_s\gamma_s f(x^s, \theta^{s0})),$$

где $s=0, 1, \ldots$; $\theta^{s\nu}$, $\nu=0, \ldots, n$, — серия независимых по $s=0, 1, \ldots$ наблюдений состояния θ, в частности, можно взять $\theta^{s0}=\ldots=\theta^{sn}=\theta^s$. Путем разложения в ряд Тейлора легко убедиться, что для вектора

$$\xi^s=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(x^s+\Delta_s e^j, u^s, \theta^{sj})-\varphi(x^s, u^s, \theta^{s0})}{\Delta_s}e^j$$

имеем

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s)=\Phi_x(x^s, u^s)+v^s\Delta_s,$$

где v^s — некоторый вектор, для которого $\|v^s\|\leqslant\mathrm{const}$. Поэтому в силу теоремы 7 гл. III значения ρ_s, Δ_s в том случае, если они детерминированные, достаточно выбирать так, чтобы

$$\rho_s\geqslant 0,\quad \sum_{s=0}^{\infty}\rho_s=\infty,\quad \sum_{s=0}^{\infty}(\rho_s|\Delta_s|+\rho_s^2)<\infty.$$

4. В (4.2) и в рассмотренной выше процедуре пробные шаги были связаны со смещением по координатным осям. Основные соотношения гл. III, которым должны удовлетворять математические ожидания случайных направлений спуска, не изменятся, если пробные шаги делать в случайных направлениях подобно тому, как это делалось для задач нелинейного программирования большой размерности в гл. III. Рассмотрим это на примере процедуры (4.2). То есть предположим, что размерность пространства R^n велика и при определении направления спуска ξ^s в (4.2) затрачивается значительное время. Тогда, аналогично (3.31), можно использовать случайные направления $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с независимыми и равномерно распределенными на $[-1, 1]$ компонентами и рассмотреть следующий процесс:

$$x^{s+1}=x^s-\rho_s\gamma_s\sum_{k=1}^{K_s}\frac{f(x^s+\Delta_s\beta^{sk}, \theta^{sk})-f(x^s, \theta^{s0})}{\Delta_s}\beta^{sk},$$
$$s=0, 1, \ldots, \tag{4.5}$$

где $\{\beta^{sk}\}$ — серия независимых наблюдений вектора β в s-й итерации, θ^{sk} — независимые по $s=0, 1, \ldots$ наблюдения сос ояния природы θ. Если функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то, подобно (3.32),

$$\mathsf{M}\left(\sum_{k=1}^{K_s} \frac{f(x^s+\Delta_s\beta^{sk},\ \theta^{sk})-f(x^s,\ \theta^{s0})}{\Delta_s}\beta^{sk}/x^s\right)=\frac{K_s}{3}F_x(x^s)+v^s\Delta_s,$$

где v^s — некоторый вектор, $\|v^s\|\leqslant \mathrm{const}$. То есть процесс (4.5) также является примером метода (3.20)—(3.21) и для регулировки величинами ρ_s, Δ_s, γ_s, K_s применимы общие условия теорем 5, 6 гл. III.

§ 2. Игровая стохастическая задача

1. Рассмотрим обобщение задачи о системе обслуживания, которая обсуждалась в § 4 гл. I. Стохастические задачи игрового типа, как можно понять из § 2 гл. I, возникают при выборе оптимальных решений в условиях неопределенности и риска, когда на выбор решения оказывает влияние множество различных переменных факторов, но лицо, принимающее решение, не имеет полной власти над ними: некоторые факторы могут быть случайными, другие могут находиться в распоряжении лиц, интересы которых полностью не согласуются с интересами принимающего решения. Предположим, что все переменные факторы можно разбить на три группы, одна из которых контролируется первым игроком (лицом, принимающим решение), другая — вторым игроком с противоположными интересами, а переменные третьей группы — состояние природы θ — являются случайными. Пусть первый игрок принимает решение x из допустимого множества X, второй — решение y из допустимого множества Y, а состояние природы θ является элементарным событием некоторого вероятностного пространства $(\Theta, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что второй игрок делает свой выбор после первого игрока и ему известен выбор x первого игрока. Если при этом $f(x, y, \theta)$ — сумма, которую второй игрок получает от первого, когда природа находится в состоянии θ, то ожидаемый проигрыш первого игрока составит

$$F(x)=\mathsf{M}\max_{y\in Y} f(x,\ y,\ \theta). \qquad (4.6)$$

Тогда первому игроку следует выбрать такое x, которое минимизирует функцию (4.6) при условии, что

$$x \in X. \tag{4.7}$$

Таким образом, получили некоторую задачу стохастического программирования. Трудность ее решения, как и тех задач, которые обсуждались в § 4 гл. I, заключается в том, что только в редких случаях можно найти функцию $F(x)$ в аналитической форме, позволяющей применять обычные методы нелинейного программирования. Кроме того, функция $F(x)$ не будет, вообще говоря, непрерывно дифференцируемой даже при достаточно гладкой функции $f(x, y, \theta)$.

2. Предположим, что множество X выпуклое и замкнутое, при каждом x и θ существует такое $y(x, \theta)$, что

$$f(x, y(x, \theta), \theta) = \max_{y \in Y} f(x, y, \theta),$$

при каждом y и θ функция $f(x, y, \theta)$ выпукла вниз и непрерывна в области X, при этом пусть $\hat{f}_x(x, y, \theta)$ — ее обобщенный градиент по x при фиксированных y и θ.

Тогда для решения задачи (4.6)—(4.7) применим метод проектирования стохастических квазиградиентов, в котором

$$\xi^s = \hat{f}_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), \tag{4.8}$$

где θ^s, $s = 0, 1, \ldots,$ — независимые наблюдения состояния природы θ.

Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что для любой точки $x \in X$ выполняется неравенство

$$F(x) - F(x^s) \geq \left(\mathsf{M}\left(\hat{f}_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s)/x^s\right), \quad x - x^s\right), \tag{4.9}$$

иначе говоря, что $\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \hat{F}_x(x^s)$.

Очевидно,

$$f(x, y(x, \theta^s), \theta^s) - f(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) \geq$$
$$\geq f(x, y(x^s, \theta^s), \theta^s) - f(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s).$$

Так как функция $f(x, y, \theta)$ при фиксированных $y \in Y$ и θ является выпуклой вверх по x и $\hat{f}_x(x, y, \theta)$ — ее обобщенный градиент, то

$$f(x,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)-f(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)\geqslant$$
$$\geqslant(\hat{f}_x(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s),\ x-x^s),$$

а поэтому

$$f(x,\ y(x,\ \theta^s),\ \theta^s)-f(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)\geqslant$$
$$\geqslant(\hat{f}_x(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s),\ x-x^s).$$

Взяв условное математическое ожидание от обеих участей этого неравенства при фиксированных x и x^s, получим требуемое неравенство (4.9).

3. Примеры.

1. Пусть

$$f(x,\ y,\ \theta)=\left|\sum_{j=1}^{n}a_j(y,\ \theta)\,x_j-b(y,\ \theta)\right|,$$

где $y\in Y$, Y — некоторое множество, например $Y=\{1,\ \ldots$ $\ldots,\ m\}$. В этом случае вектор $\xi^s=(\xi_1^s,\ \ldots,\ \xi_n^s)$, выбираемый в соответствии с (4.8), имеет следующий вид:

$$\xi_j^s=a_j(y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)\operatorname{sign}\left(\sum_{j=1}^{n}a_i(y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)\,x_j^s-\right.$$
$$\left.-b(y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)\right),$$

где $\operatorname{sign}a$ для произвольного числа a равен 1, если $a>0$, и равен -1, если $a\leqslant 0$. Если при всех $y\in Y$ значение $\left|\sum_i a_j(y,\ \theta)\right|\leqslant \mathrm{const}$ с вероятностью 1, то $\mathsf{M}(\|\xi^s\|^2/x^s)\leqslant$ $\leqslant\mathrm{const}$, т. е. выполняются условия (3.9) теоремы 4 гл. III. Тогда в методе (3.4)—(3.5) можно взять $\gamma_s\equiv 1$ и выбирать ρ_s из условий: $\rho_s\geqslant 0$, $\sum\rho_s=\infty$, $\sum\mathsf{M}\rho_s^2<\infty$ с вероятностью 1.

2. Применим формулу (4.8) для решения задачи о системе обслуживания (1.41)—(1.43) в том случае, когда имеет место (1.40). Функция

$$f(x,\ y,\ \theta)=\sum_{i=1}^{n}f_i^y(x_{i1},\ \ldots,\ x_{ip},\ \theta_i^y),$$

где $y\in\{1,\ \ldots,\ K\}$.

В силу (1.40) функция $f_i^y(\cdot)$ при каждых i, y фактически зависит от переменных $z_i^y = \sum_j \lambda_{ij}^y x_{ij}$ и θ_i^y и является выпуклой вниз по z_i^y, причем в точке $z_i^y = \theta_i^y$ терпит излом. Поэтому для вычисления обобщенного градиента $f(x, y, \theta)$ при данных (y, θ) можно воспользоваться п. 3 дополнений к гл. I. Тогда в соответствии с (4.8) вектор ξ^s, который в данном случае имеет компоненты ξ_{ij}^s, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, вычисляется следующим образом.

Пусть x_{ij}^s — приближенное решение задачи (1.41)—(1.43), полученное после s-й итерации; $\theta_i^y(s)$ — число требований, поступивших на выход $i \in I^-$ по сценарию y, «проигранному» на ЭВМ после s-й итерации. Обозначим через y_s число, для которого

$$f(x^s, y^s, \theta^s) = \max_{1 \leqslant y \leqslant K} f(x^s, y, \theta^s).$$

Тогда

$$\xi_{ij}^s = \begin{cases} d_i^{y_s} \lambda_{ij}^{y_s}, & \sum_j \lambda_{ij}^{y_s} x_{ij}^s \geqslant \theta_i^{y_s}(s), \\ -c_i^{y_s} \lambda_{ij}^{y_s}, & \sum_j \lambda_{ij}^{y_s} x_{ij}^s < \theta_i^{y_s}(s). \end{cases}$$

Затем следует воспользоваться методом проектирования стохастических квазиградиентов (3.4)—(3.5), получить x_{ij}^{s+1} и т. д. При этом операция проектирования, очевидно, сводится к решению независимых задач: минимизировать (при данном $z = \{z_{ij}\}$)

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij} - z_{ij})^2$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leqslant b_j, \quad x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $j = 1, \ldots, p$. Каждая из этих задач легко решается методом, описанным в гл. I.

4. Пусть функция $f(x, y, \theta)$ при каждом θ, $y \in Y$ непрерывно дифференцируема, и пусть для любых точек x, z множества X справедливо неравенство

$$F(z) - F(x) \geqslant (\mathsf{M} f_x(x, y(x, \theta), \theta), z - x), \qquad (4.10)$$

где $f_x(x,\ y(x,\ \theta),\ \theta)$ — градиент $f(x,\ y,\ \theta)$ по переменным x при данном θ и $y=y(x,\ \theta)$, т. е. функция $f(x,\ y,\ \theta)$ может быть невыпуклой по x.

Если $f_x(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)$ легко вычислить, то для решения задачи (4.6)—(4.7) применим метод проектирования стохастических квазиградиентов, в котором

$$\xi^s=f_x(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s). \tag{4.11}$$

При этом доказательство соотношения (4.9) непосредственно следует из (4.10), т. е. из (4.10) следует, что для вектора ξ^s, определенного согласно (4.11), имеем

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s)=\hat{F}_x(x^s). \tag{4.12}$$

Если же $f_x(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)$ вычислить невозможно, но $f(x,\ y,\ \theta)$ имеет равномерно ограниченные вторые производные по $x\in X$ при всех θ, $y\in Y$, то следует взять

$$\xi^s=\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x^s+\Delta_s e^j,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)-f(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)}{\Delta_s}e^j \tag{4.13}$$

или

$$\xi^s=\sum_{k=1}^{K_s}\frac{f(x^s+\Delta_s\beta^{sk},\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)-f(x^s,\ y(x^s,\ \theta^s),\ \theta^s)}{\Delta_s}\beta^{sk}, \tag{4.14}$$

где θ^s, $s=0,\ 1,\ \ldots,$ — независимые наблюдения θ. Применяя в выражениях (4.13), (4.14) формулу Тейлора и учитывая, что вектор (4.11) в силу (4.10) удовлетворяет (4.12), получим, что для вектора ξ^s, определенного согласно (4.13), справедливо соотношение

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s)=\hat{F}_x(x^s)+v^s\Delta_s,$$

а для ξ^s, определенного согласно (4.14), — соотношение

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s)=\frac{K_s}{3}\hat{F}_x(x^s)+v^s\Delta_s,$$

где v^s — некоторый вектор, для которого $\|v^s\|\leqslant\text{const}$.

§ 3. Задачи двухэтапного стохастического программирования

1. Эти важные задачи перспективного планирования впервые сформулированы Данцигом и Маданским [12]. Ими же был указан случай, когда задача (1.52)—(1.53) сводится к задаче линейного программирования (см. гл. II). С тех пор теория решения двухэтапных задач интенсивно развивалась (см. обзорные работы [2], [8]), выяснились условия оптимальности, но, к сожалению, численные методы, которые при этом были предложены, применимы только в очень частных случаях, как правило мало интересных с точки зрения приложений. Метод (3.4)—(3.5) позволяет решать двухэтапные задачи весьма общего вида с нелинейными ограничениями.

Предположим, что план x и его коррекция y вместо (1.48) должны при всех θ удовлетворять ограничениям

$$f^i(x, y, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.15}$$

$$x \in X, \ y \in Y, \tag{4.16}$$

причем $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_r)$. Пусть затраты, связанные с реализацией плана x и его коррекцией y в состоянии природы θ, равны

$$f^0(x, y, \theta). \tag{4.17}$$

Обозначим через $y(x, \theta)$ коррекцию, которая минимизирует (4.17) при условиях (4.15)—(4.16) и фиксированных x и θ. Тогда ожидаемые затраты на реализацию плана x и коррекцию $y(x, \theta)$ составят

$$F(x) = Mf^0(x, y(x, \theta), \theta), \tag{4.18}$$

и задача заключается в выборе такого плана x, который минимизирует функцию цели (4.18) при условии, что

$$x \in X. \tag{4.19}$$

2. Предположим, что функции $f^\nu(x, y, \theta)$ при каждом θ выпуклы вниз и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных (x, y) и что при каждом x и θ существует седловая точка $(y(x, \theta), u(x, \theta))$ функции Лагранжа

$$\varphi(y, u) = f^0(x, y, \theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x, y, \theta) \tag{4.20}$$

при $y \in Y$, $u \geqslant 0$. Здесь не случайно точка минимума функции (4.17) и первая компонента седловой точки имеют одинаковые обозначения: при сделанных предположениях точка минимума обязательно будет первой компонентой одной из седловых точек, и наоборот.

Пусть $\hat{f}^{\nu}_{xy}x, y, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, — обобщенный градиент функции $f^{\nu}(x, y, \theta)$ по совокупности (x, y) при фиксированном θ, причем предположим, что этот вектор представим как $\hat{f}^{\nu}_{xy} = \left(\hat{f}^{\nu}_{x}, \hat{f}^{\nu}_{y}\right)$, где $\hat{f}^{\nu}_{x}$, $\hat{f}^{\nu}_{y}$ — обобщенные градиенты функции $f(x, y, \theta)$ по переменным x и y при фиксированных остальных переменных. Тогда для того, чтобы решить задачу (4.18)—(4.19) с выпуклым и замкнутым множеством X методом (3.4)—(3.5), следует взять

$$\xi^s = \hat{f}^0_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) + \\ + \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s)\hat{f}^i_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), \qquad (4.21)$$

где θ^s, $s = 0, 1, \ldots$, — независимые реализации состояний θ.

3. Покажем, что для функции $F(x)$, определенной согласно (4.18), и вектора ξ^s, определенного согласно (4.21),

$$F(x) - F(x^s) \geqslant (\mathsf{M}(\xi^s/x^s), x - x^s) \qquad (4.22)$$

для любой точки $x \in X$. Иначе говоря,

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \hat{F}_x(x^s).$$

Действительно, из соотношений дополняющей нежесткости, выполненных в силу существования седловой точки, следует, что

$$f^0(x, y(x, \theta), \theta) = \\ = f^0(x, y(x, \theta), \theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i(x, \theta) f^i(x, y(x, \theta), \theta)$$

при любых x и θ. Обозначим $f^0(x, y(x, \theta), \theta)$ через $q(x, \theta)$. Тогда

$$q(x, \theta^s) - q(x^s, \theta^s) =$$
$$= f^0(x, y(x, \theta^s), \theta^s) + \sum_{i=1}^{m} u_i(x, \theta^s) f^i(x, y(x, \theta^s), \theta^s) -$$
$$- f^0(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s) f^i(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) \geqslant$$
$$\geqslant f^0(x, y(x, \theta^s), \theta^s) - f^0(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s)[f^i(x, y(x, \theta^s), \theta^s) - f^i(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s)].$$

Так как функции $f^\nu(x, y, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, при каждом θ являются выпуклыми вниз по совокупности переменных (x, y), то отсюда следует, что

$$q(x, \theta^s) - q(x^s, \theta^s) \geqslant \Big(\hat{f}^0_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s) \hat{f}^i_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), x - x^s\Big) +$$
$$+ \Big(\hat{f}^0_y(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s) \hat{f}^i_y(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), y(x, \theta^s) - y(x^s, \theta^s)\Big).$$

Второе скалярное произведение правой части полученного неравенства неотрицательно в силу того, что функция Лагранжа $\varphi(y, u)$ при $y = y(x^s, \theta^s)$ принимает минимальное значение (это означает, что $\big(\hat{\varphi}_y(y(x^s, \theta^s), u), y - y(x^s, \theta^s)\big) \geqslant 0$, т. е. в направлении $y - y(x^s, \theta^s)$ функция $\varphi(y, u)$ в точке $y = y(x^s, \theta^s)$ не убывает). Отсюда следует, что

$$q(x, \theta^s) - q(x^s, \theta^s) \geqslant \Big(\hat{f}^0_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} u_i(x^s, \theta^s) \hat{f}^i_x(x^s, y(x^s, \theta^s), \theta^s), x - x^s\Big). \qquad (4.23)$$

Взяв условное математическое ожидание от обеих частей этого неравенства при фиксированных x и x^s, получим требуемое неравенство (4.22).

4. Примеры.

1. Рассмотрим задачу с линейными ограничениями (1.48)—(1.53). Вектор $y(x, \theta)$ минимизирует (1.51) при условиях (1.48)—(1.49), т. е. является решением задачи линейного программирования. В приложениях обычно матрица B имеет простую структуру и $y(x, \theta)$ отыскивается без труда (см. п. 6 дополнений к гл. I).

Обозначим через $u(x, \theta) = (u_1(x, \theta), \ldots, u_m(x, \theta))$ двойственные переменные, отвечающие $y(x, \theta)$. Формула (4.22) показывает, что вектор ξ^s метода (3.4)—(3.5) в данном случае вычисляется следующим образом: после s-й итерации имеется x^s, наблюдается в соответствии с заданным распределением или путем «проигрывания» на ЭВМ определенных сценариев θ^s, отыскивается $u(x^s, \theta^s)$ и вычисляется

$$\xi^s = c - A^T(\theta^s)\, u(x^s, \theta^s), \tag{4.24}$$

где через A^T обозначена матрица, транспонированная к матрице A, θ^s — независимые реализации состояния природы θ. Если коэффициенты матрицы A ограничены, т. е. $\|A\| \leqslant \text{const}$, то в случае (4.24) имеем

$$M(\|\xi^s\|^2/x^s) \leqslant c\,(1 + \|\mathsf{M}(u(x^s, \theta^s)/x^s)\|^2). \tag{4.25}$$

2. Рассмотрим пример, когда значение $\|\mathsf{M}(u(x^s, \theta^s)/x^s)\|$ оценивается без труда. Пусть

$$f^\nu(x, y, \theta) = g^\nu(x, \theta) + (a^\nu, y),$$

где $\nu = 0, 1, \ldots, m$, $a^\nu = (a_1^\nu, \ldots, a_r^\nu)$, $Y = \{y\colon y \geqslant 0\}$.

Вектор $y(x^s, \theta^s)$ является решением задачи: минимизировать

$$g^0(x^s, \theta^s) + \sum_{j=1}^{r} a_j^0 y_j$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{r} a_j^i y_j \leqslant -g^i(x^s, \theta^s), \quad i = 1, \ldots, m, \quad y_1 \geqslant 0, \ldots, y_r \geqslant 0.$$

Вектор $u(x^s, \theta^s)$ является решением следующей *двойственной задачи:* максимизировать

$$\sum_{i=1}^{m} g^i(x^s, \theta^s)\, u_i \tag{4.26}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_j^i u_i \geqslant -a_j^0, \quad j=1, \ldots, r, \tag{4.27}$$

$$u_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ u_m \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Поэтому, если многогранник, высекаемый ограничениями двойственной задачи, ограничен, то

$$\| \mathsf{M} (u(x^s, \theta^s)/x^s) \| \leqslant \text{const}.$$

3. Пусть $f^\nu(x, y, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, имеют вторые производные по x, равномерно ограниченные при всех θ и $y \in Y$. Тогда вместо вектора (4.21) в методе (3.4) — (3.5) можно применить вектор

$$\xi^s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(x^s + \Delta_s e^j, y^s, u^s, \theta^s) - \varphi(x^s, y^s, u^s, \theta^s)}{\Delta_s} e^j \tag{4.29}$$

или

$$\xi^s = \sum_{k=1}^{K_s} \frac{\varphi(x^s + \Delta_s \beta^{sk}, y^s, u^s, \theta^s) - \varphi(x^s, y^s, u^s, \theta^s)}{\Delta_s} \beta^{sk}, \tag{4.30}$$

где $\varphi(x, y, u, \theta) = f^0(x, y, \theta) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i f^i(x, y, \theta)$, $y^s = y(x^s, \theta^s)$, $u^s = u(x^s, \theta^s)$.

Применяя к (4.29), (4.30) формулу Тейлора, а затем переходя к условным математическим ожиданиям при фиксированном x^s, легко убедиться, что для ξ^s, вычисляемого по формуле (4.29), справедливо соотношение

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \hat{F}_x(x^s) + v^s \Delta_s,$$

а для ξ^s, вычисляемого по формуле (4.30), справедливо соотношение

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = \frac{K_s}{3} \hat{F}_x(x^s) + v^s \Delta_s.$$

В этих соотношениях v^s — некоторые (различные) векторы, удовлетворяющие неравенству

$$\| v^s \| \leqslant C \| \mathsf{M}(u(x^s, \theta^s)/x^s) \|.$$

§ 4. Программное управление случайным процессом

1. Линейная система. Негладкий функционал. Задача программного управления случайным процессом была сформулирована в § 4 гл. I как задача выбора такого управления (последовательности векторов) $x(k)$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, которое минимизирует математическое ожидание

$$F(x(0), \ldots, x(N-1)) = \\ = \mathsf{M} f(x(0), \ldots, x(N-1), \quad z(0), \ldots, z(N), \theta) \tag{4.31}$$

при условиях

$$z(k+1) = A(k, \theta) z(k) + B(k, \theta) x(k) + c(k, \theta), \tag{4.32}$$
$$z(0) = z^0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x(k) \in X(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.33}$$

Предположим, что множества $X(k)$ выпуклые и замкнутые, функция $f(x, z, \theta)$ выпуклая вниз по совокупности переменных $x(z)$ почти при каждом θ. Этим условиям удовлетворяет функция (1.47), т. е.

$$f(x, z, \theta) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} \| z(k) - \tilde{z}(k) \|^2, \tag{4.34}$$

которая возникает в задачах «настройки» параметров управления так, чтобы ожидаемый максимальный «выброс» сигнала за заданный уровень был наименьшим. К задаче (4.31) — (4.34) путем разностной аппроксимации сводятся задачи управления объектами, поведение которых описывается системой стохастических дифференциальных уравнений.

Обозначим обобщенный градиент функции $f(x, z, \theta)$ по совокупности переменных $(x, z) = (x(0), \ldots, x(N-1), z(0), \ldots, z(N))$ через $\hat{f}_{(x,z)}(x, z, \theta)$. Пусть $\hat{f}_{x(k)}$, $\hat{f}_{z(k)}$ — компоненты вектора $\hat{f}_{(x,z)}$, отвечающие совокупностям переменных $x(k)$, $z(k)$, т. е.

$$\hat{f}_{(x,z)} = (\hat{f}_{x(0)}, \ldots, \hat{f}_{x(N-1)}, \quad \hat{f}_{z(0)}, \ldots, \hat{f}_{z(N)}),$$

$$f(y, w, \theta) - f(x, z, \theta) \geqslant \sum_{k=0}^{N} (\hat{f}_{x(k)}(x, z, \theta), \quad y(k) - x(k)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{z(k)}(x, z, \theta), w(k) - z(k)). \tag{4.35}$$

Рассмотрим последовательность управлений $\{x^s(k), k=0, 1, \ldots, N-1\}$, в которой управление $x^0(k)$, $k=0, \ldots, N-1$, произвольное, а $x^{s+1}(k)$, $k=0, \ldots, N-1$, получено при каждом $s=1, 2, \ldots$ на основе $x^s(k)$ по следующему правилу: делается независимое испытание над состоянием природы θ, и наблюдается θ^s; из (4.32) определяется траектория $z^s(k)$, отвечающая $\theta=\theta^s$, $x(k)=x^s(k)$, $k=0, 1, \ldots, N-1$; определяется решение $\lambda^s(k)$, $k=N, \ldots$ $\ldots, 0$, системы уравнений для сопряженных переменных

$$\lambda(k)=\lambda(k+1)A(k, \theta)+ \\ +\hat{f}_{z(k)}(x(0), \ldots, x(N-1), \quad z(0), \ldots, z(N-1), \theta), \tag{4.36}$$

$$\lambda(N)=-\hat{f}_{z(N)}(x(0), \ldots, x(N), \quad z(0), \ldots, z(N-1), \theta)$$

при $z(k)=z^s(k)$, $x(k)=x^s(k)$, $\theta=\theta^s$; вычисляется совокупность векторов

$$\xi^s(k)=\hat{f}_{x(k)}(x^s(0), \ldots, x^s(N-1), \quad z^s(0), \ldots, z^s(N), \theta^s)- \\ -\lambda^s(k+1)B(k, \theta^s), \tag{4.37}$$

и строится

$$x^{s+1}(k)=\pi_{X(k)}(x^s(k)-\rho_s\gamma_s\xi^s(k)), \quad k=0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.38}$$

где ρ_s — величина шага спуска, зависящая, вообще говоря, от $x^s(0), \ldots, x^s(N-1)$; γ_s — нормирующий множитель; $\pi_{X(k)}$ — операция проектирования на множество $X(k)$.

Покажем, что процедура (4.38) является разновидностью метода проектирования стохастических квазиградиентов и поэтому сходимость последовательности управлений $\{x^s(k), k=0, 1, \ldots, N-1\}$ к решению задачи (4.31) — (4.33) (при соответствующем выборе ρ_s, γ_s) следует из гл. III.

Рассмотрим вектор $\xi^s=(\xi^s(0), \ldots, \xi^s(N-1))$ и убедимся, что его условное математическое ожидание при фиксированном управлении $x^s(k)$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, совпадает с обобщенным градиентом функции цели $F(x(0), \ldots$ $\ldots, x(N-1))$, т. е.

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s(0), \ldots, x^s(N-1))=\hat{F}_x(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)), \tag{4.39}$$

или, другими словами,

$$F(x(0), \ldots, x(N-1))-F(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=0}^{N-1}(\mathsf{M}(\xi^s(k)/x^s(0), \ldots, x^s(N-1)), x(k)-x^s(k)). \tag{4.40}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&F(x(0), \ldots, x(N-1)) - F(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)) = \\
&\quad = \mathsf{M}_{x^s}\Big[f(x(0), \ldots, x(N-1),\ z(0), \ldots, z(N),\ \theta) - \\
&\quad - f(x^s(0), \ldots, x^s(N-1),\ z^s(0), \ldots, z^s(N),\ \theta) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^s(k+1),\ z(k+1) - A(k, \theta) z(k) - \\
&\quad - B(k, \theta) x(k) - c(k, \theta)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^s(k+1),\ z^s(k+1) - \\
&\quad - A(k, \theta) z^s(k) - B(k, \theta) x^s(k) - c(k, \theta))\Big],
\end{aligned}
$$

где через M_{x^s} обозначено математическое ожидание при данных $x^s(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Если воспользоваться неравенством (4.35) и сгруппировать слагаемые при $x(k) - x^s(k)$, $z(k) - z^s(k)$, то получим

$$
\begin{aligned}
&F(x(0), \ldots, x(N-1)) - F(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)) \geqslant \\
&\quad \geqslant \mathsf{M}_{x^s}\Big\{\sum_{k=0}^{N-1} \big[(\hat{f}_{x(k)}(x^s, z^s, \theta),\ x(k) - x^s(k)) + \\
&\quad + (\hat{f}_{z(k)}(x^s, z^s, \theta),\ z(k) - z^s(k))\big] + \\
&\quad + (\hat{f}_{z(N)}(x^s, z^s, \theta),\ z(N) - z^s(N)) + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^s(k) - \lambda^s(k+1) A(k, \theta),\ z(k) - z^s(k)) + \\
&\quad + (\lambda^s(N),\ z(N) - z^s(N)) - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^s(k+1) B(k, \theta),\ x(k) - x^s(k))\Big\}. \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Легко найти различные достаточные условия того, чтобы сделанная группировка слагаемых под знаком математического ожидания была обоснованной. Из (4.41) с учетом соотношений (4.36) получим

$$
\begin{aligned}
&F(x(0), \ldots, x(N-1)) - F(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)) \geqslant \\
&\quad \geqslant \mathsf{M}_{x^s} \sum_{k=0}^{N-1} (\hat{f}_{x(k)}(x^s, z^s, \theta) - \lambda^s(k+1) A(k, \theta),\ x(k) - x^s(k)), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

Полученное неравенство (4.42) справедливо не только для задач с программным управлением. Оно справедливо и в тех случаях, когда управление может быть случайным, скажем зависящим от предыстории управляемого процесса. Важно только, чтобы на $A(k, \theta)$, $B(k, \theta)$, $c(k, \theta)$, $f(x, z, \theta)$ и класс управлений $x(k, \theta)$ были наложены такие условия, при которых существовали бы математические ожидания слагаемых правой части соотношений (4.40).

Заметим, что для случая (4.34) в (4.36), (4.37) имеем $\hat{f}_{x(k)}(\cdot) \equiv 0$,

$$\hat{f}_{z(k)}(\cdot) = \begin{cases} 2(z(k) - \tilde{z}(k)), & \text{если } \|z(k) - \tilde{z}(k)\| = \\ & = \max\limits_{0 \leqslant l \leqslant N} \|z(l) - \tilde{z}(l)\|, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2. Гладкий функционал. Нелинейная система. Пусть поведение объекта описывается системой разностных уравнений

$$z(k+1) = g(k, z(k), x(k), \theta), \quad z(0) = z^0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.43}$$

$$x(k) \in X(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4.44}$$

где $z(k) = (z_1(k), \ldots, z_m(k))$ — состояние объекта, $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$ — управление в момент времени k. Требуется выбрать такую последовательность управлений $x(0), \ldots, x(N-1)$, которая минимизирует

$$F(x(0), \ldots, x(N-1)) = \mathrm{M} f(z(N), \theta).$$

В конкретных задачах обычно $\theta = (\theta(0), \ldots, \theta(N))$, где $\theta(k)$ — случайное воздействие в момент времени k. Подобно задаче п. 1, вычисление стохастического квазиградиента в данном случае сводится к следующим операциям.

Обозначим через g_z, g_x матрицы, в которых на пересечении i-й строки и j-го столбца находятся соответственно элементы $\frac{\partial g^i}{\partial z_j}$, $\frac{\partial g^i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $x^0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, — произвольное начальное управление. Если после s итераций получено управление $x^s(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, то затем производится независимое наблюдение θ^s состояния природы θ и определяется из (4.43) при $x(k) = x^s(k)$, $\theta = \theta^s$ траектория процесса

$$z^s(k), \; k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

из уравнений

$$\lambda(k)=\lambda(k+1)\,g_z(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta),$$
$$\lambda(N)=-f_z(z(N),\ \theta),\quad k=N-1,\ \ldots,\ 0, \tag{4.45}$$

определяются при $x(k)=x^s(k)$, $z(k)=z^s(k)$, $\theta=\theta^s$ сопряженные переменные $\lambda^s(k)$, $k=N,\ \ldots,\ 0$. Положим

$$\xi^s(k)=-\lambda^s(k+1)\,g_x(k,\ z^s(k),\ x^s(k),\ \theta),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Можно показать, что при естественных предположениях

$$\mathsf{M}(\xi^s(k)/x^s(0),\ \ldots,\ x^s(N-1))=$$
$$=F_{x(k)}(x^s(0),\ \ldots,\ x^s(k),\ \ldots,\ x^s(N-1)),$$

т. е. совокупность векторов $\xi^s=(\xi^s(0),\ \ldots,\ \xi^s(N-1))$ представляет собой стохастический градиент рассматриваемой функции цели в точке $x^s=(x^s(0),\ \ldots,\ x^s(N-1))$:

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^s)=F_x(x^s(0),\ \ldots,\ x^s(N-1)). \tag{4.46}$$

Схема доказательства этого утверждения такова. Пусть имеется управление $x(k)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$. Рассмотрим управление $x(k)+\alpha v(k)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$, где α — некоторое положительное число, и представим траекторию (решение) системы (4.43) при фиксированном θ как $z(k)+\alpha h(k)$, где $h(0)=0$. Значение $f(z(N),\ \theta)$ при фиксированном θ определяется последовательностью $x(0),\ \ldots$ $\ldots,\ x(N-1)$, т. е. можно записать, что $f(z(N),\ \theta)=r(x(0),\ \ldots,\ x(N-1),\ \theta)$. Приближенно

$$\Delta f=(f_z(z(N),\ \theta),\ h(N)),$$
$$z(k+1)+\alpha h(k+1)=$$
$$=g(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta)+\alpha g_z(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta)\,h(k)+$$
$$+\alpha g_x(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta)\,v(k),$$

откуда получаем

$$h(k+1)=g_z(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta)\,h(k)+g_x(k,\ z(k),\ x(k),\ \theta)\,v(k),$$
$$h(0)=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Величины $h(k,\ \theta)$ при данном θ определяются приращениями $v(k)$ управления $x(k)+\alpha v(k)$. Выразим Δf через $v(k)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$. Тогда коэффициенты при $v(k)$ дадут компоненты градиента функции $f(z(N),\ \theta)$ (θ фиксировано) по независимым переменным $x(0),\ \ldots,\ x(N)$.

Рассмотрим пока произвольные векторы $\lambda(k, \theta) = (\lambda_1(k, \theta), \ldots \ldots, \lambda_n(k, \theta))$ и представим

$$\frac{\Delta f}{\alpha} = (f_z(z(N), \theta), h(N)) + (h(0), \lambda(0)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), h(k+1) - g_z(k, z(k), x(k), \theta) h(k) - \\ - g_x(k, z(k), x(k), \theta) v(k)) = (f_z(z(N), \theta), h(N)) + \\ + \sum_{k=0}^{N} (\lambda(k), h(k)) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), g_z(k, z(k), x(k), \theta) h(k)) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), g_x(k, z(k), x(k), \theta) v(k)) = \\ = (f_z(z(N), \theta) + \lambda(N), h(N)) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k) - \lambda(k+1) g_z(k, z(k), x(k), \theta), h(k)) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1) g_z(k, z(k), x(k), \theta), v(k)).$$

Если теперь выбрать $\lambda(k, \theta)$ так, чтобы

$$\lambda(k) = \lambda(k+1) g_z(k, z(k), x(k), \theta),$$
$$\lambda(N) = -f_z(z(N), \theta), \quad k = N-1, \ldots, 0,$$

то

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\Delta f}{\alpha} = -\sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1) g_x(k, z(k), x(k), \theta), v(k)).$$

Это соотношение показывает, что

$$r_{x(k)}(x(0), \ldots, x(N-1), \theta) = -\lambda(k+1) g_x(k, z(k), x(k), \theta),$$

причем так как

$$F(x(0), \ldots, x(N-1)) = \mathrm{M} r(x(0), \ldots, x(N-1), \theta),$$

то при соответствующих условиях

$$\mathsf{M}\,(r_{x(k)}(x^s(0), \ldots, x^s(N-1), \theta)/x^s(0), \ldots, x^s(N-1)) = \\ = F_{x(k)}(x^s(0), \ldots, x^s(N-1)),$$

что и доказывает формулу (4.46).

3. Выбор начального состояния управляемого процесса. Поведение рассмотренных выше управляемых процессов определяется выбором начального состояния и управления. В некоторых прикладных задачах начальное состояние бывает не заданным и требуется выбрать его оптимальным образом. Например, в системах управления снабжением размер поставки определяет начальное состояние управляемой системы, а расход созданного запаса описывается системой разностных уравнений при данном начальном состоянии. Покажем, каким образом вычисляется стохастический квазиградиент в таких случаях.

Предположим, что поведение объекта описывается системой разностных уравнений

$$z(k+1) = A(k, \theta)\, z(k) + c(k, x(k), \theta), \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} z(0) &= a, & k &= 0, 1, \ldots, N-1, \\ x(k) &\in X(k), & k &= 0, 1, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{4.48}$$

где $z(k) = (z_1(k), \ldots, z_m(k))$, $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))$, $A(k, \theta)$ — матрица, $c(k, x, \theta)$ — вектор-функция. Начальное состояние a не задано, но известно, что

$$a \in A. \tag{4.49}$$

При фиксированных a, θ и управлении $x(k)$ вычисляются затраты $f(a, z(N), \theta)$. Обозначим через $q(a, \theta)$ наименьшее значение функции $f(a, z(N), \theta)$ при фиксированных a, θ, если управление $x(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, удовлетворяют ограничениям (4.47), (4.48). Требуется выбрать такое начальное состояние a, которое минимизирует

$$F(a) = \mathsf{M}q(a, \theta) \tag{4.50}$$

при ограничениях (4.49). Очевидно, это — разновидность двухэтапной задачи стохастического программирования, в которой коррекция начального решения a определяется выбором при данном θ последовательности управляющих воздействий $x(0), \ldots, x(N-1)$. Эта задача относится к двухэтапным динамическим задачам стохастического программирования.

Пусть при любом θ функция $f(a, z, \theta)$ выпукла вниз по совокупности переменных (a, z). Найдем стохастический квазиградиент функции (4.50). Для этого рассмотрим функцию Лагранжа

$$\varphi(x, z, \lambda) = f(a, z(N), \theta) + (\lambda(0), z(0) - a) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), z(k+1) - A(k, \theta)) z(k) - c(k, x(k), \theta) = \\ = f(a, z(N), \theta) - (\lambda(0), a) + (\lambda(N), z(N)) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k) - \lambda(k+1) A(k, \theta), z(k)) - \\ - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda(k+1), c(k, x(k), \theta)).$$

Лемма 1. *Пусть управление $x^a(k, \theta)$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N-1$, и траектория $z^a(k, \theta)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, при данных a, θ удовлетворяют* (4.47). *Кроме того, существуют множители Лагранжа $\lambda^a(k, \theta)$, $k = N, \ldots, 0$, такие, что при $x(k, \theta) = x^a(k, \theta)$, $z(k, \theta) = z^a(k, \theta)$, $\lambda(k, \theta) = \lambda^a(k, \theta)$ справедливы соотношения*

$$(\lambda(k+1, \theta), c(k, x(k, \theta), \theta)) = \max_{x \in X(k)} (\lambda(k+1), c(k, x, \theta)), \tag{4.51}$$

$$\lambda(k) = \lambda(k+1) A(k, \theta), \quad \lambda(N) = -\hat{f}_z(a, z(N), \theta), \\ k = N-1, \ldots, 0, \tag{4.52}$$

где $\hat{f}_z(a, z, \theta)$ — обобщенный градиент функции $f(a, z, \theta)$ по z при данных (a, θ). Тогда $\bar{x} = (x^a(0), \ldots, x^a(N-1))$, $\bar{z} = (z^a(0), \ldots, z^a(N))$, $\bar{\lambda} = (\lambda^a(0), \ldots, \lambda^a(N))$ образуют седловую точку функции Лагранжа $\varphi(x, z, \lambda, \theta)$, т. е.

$$\varphi(\bar{x}, \bar{z}, \lambda) \leqslant \varphi(\bar{x}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \leqslant \varphi(x, z, \bar{\lambda}) \tag{4.53}$$

для любых $\lambda = (\lambda(0), \ldots, \lambda(N))$, допустимых управлений $x = (x(0), \ldots, x(N-1))$ и траекторий $z = (z(0), \ldots, z(N))$, удовлетворяющих (4.47) — (4.48).

Доказательство. Действительно,

$$\varphi(x,\ z,\ \bar{\lambda})-\varphi(\bar{x},\ \bar{z},\ \bar{\lambda})=$$
$$=f(a,\ z(N),\ \theta)-f(a,\ z^a(N),\ \theta)+(\lambda^a(N),\ z(N)-z^a(N))+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k)-\lambda^a(k+1)A(k,\ \theta),\ z(k)-z^a(k))-$$
$$-\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\lambda^a(k+1),\ c(k,\ x(k),\ \theta)-c(k,\ x^a(k),\ \theta)\right)\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках в силу (4.51) неположительно. Кроме того,

$$f(a,\ z(N),\ \theta)-f(a,\ z^a(N),\ \theta)\geqslant$$
$$\geqslant(\hat{f}_z(a,\ z^a(N),\ \theta),\ z(N)-z^a(N));$$

поэтому, с учетом (4.52),

$$\varphi(x,\ z,\ \bar{\lambda})-\varphi(\bar{x},\ \bar{z},\ \bar{\lambda})\geqslant$$
$$\geqslant\left(\hat{f}_z(a,\ z^a(N),\ \theta),\ z(N)-z^a(N)\right)+(\lambda^a(N),\ z(N)-z^a(N))+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k)-\lambda^a(k+1)A(k,\ \theta),\ z(k)-z^a(k))=0,$$

т. е. правая часть неравенств (4.53) доказана. Далее, если управление $\bar{x}$ и траектория $\bar{z}$ удовлетворяют (4.47), то для любого $\lambda=(\lambda(0),\ \ldots,\ \lambda(N))$ имеем, что $\varphi(\bar{x},\ \bar{z},\ \bar{\lambda})=\varphi(\bar{x},\ \bar{y},\ \lambda)$, т. е. левое неравенство (4.53) также справедливо.

Замечание. Из леммы следует, что минимизация функции $f(a, z(N), \theta)$ при данных (a, θ) и условиях (4.47) — (4.48) равносильна максимизации (4.51) при ограничениях (4.52), (4.47), т. е. выбору управления согласно дискретному принципу максимума. Кроме того, справедливо соотношение

$$q(a,\ \theta)=f(a,\ z^a(N),\ \theta)+(\lambda^a(0),\ z^a(0)-a)+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k)-\lambda^a(k+1)A(k,\ \theta),\ z(k))-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k+1),\ c(k,\ x,\ \theta)).\qquad(4.54)$$

Поскольку при каждом θ функция $f(a, z, \theta)$ выпукла вниз по совокупности переменных (a, z), то имеет место неравенство

$$f(b, y, \theta) - f(a, z, \theta) \geqslant$$
$$\geqslant (\hat{f}_a(a, z, \theta), b - a) + (\hat{f}_z(a, z, \theta), y - z),$$

где вектор $(\hat{f}_a(a, z, \theta), \hat{f}_z(a, z, \theta))$ — обобщенный градиент функции $f(a, z, \theta)$ по совокупности переменных (a, z).

Теорема 1. *Предположим, что каждая из компонент $\hat{f}_a(a, z, \theta)$, $\hat{f}_z(a, z, \theta)$ является обобщенным градиентом функции $f(a, z, \theta)$ соответственно по переменным a и z.*

Тогда для функции $F(a)$, определенной согласно (4.50), *справедливо неравенство*

$$F(b) - F(a) \geqslant (\mathsf{M}\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta) - \lambda^a(0, \theta), b - a). \qquad (4.55)$$

Доказательство. Действительно, в силу (4.53), (4.54)

$$q(b, \theta) - q(a, \theta) \geqslant (\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta), b - a) +$$
$$+ (\hat{f}_z(a, z^a(N), \theta), z^b(N) - z^a(N)) +$$
$$+ \Big\{(\lambda^b(N), z^b(N)) - (\lambda^b(0), b) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^b(k) - \lambda^b(k+1) \times$$
$$\times A(k, \theta), z^b(k)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^b(k+1), c(k, x^b(k), \theta))\Big\} -$$
$$- \Big\{(\lambda^a(N), z^a(N)) - (\lambda^a(0), a) + \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^a(k) - \lambda^a(k+1) \times$$
$$\times A(k, \theta), z^a(k)) - \sum_{k=0}^{N-1} (\lambda^a(k+1), c(k, x^a(k), \theta))\Big\}.$$

Усилим неравенство, заменив $\lambda^b(k)$, $k=0, 1, \ldots, N$, на $\lambda^a(k)$, $k=0, 1, \ldots, N$:

$$q(b, \theta)-q(a, \theta) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta), b-a\right)+\left(\hat{f}_z(a, z^a(N), \theta), z^b(N)-\right.$$
$$\left.-z^a(N)\right)+(\lambda^a(N), z^b(N)-z^a(N))-(\lambda^a(0), b-a)+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k)-\lambda^a(k+1)A(k, \theta), z^b(k)-z^a(k))-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\{(\lambda^a(k+1), c(k, x^b(k), \theta))-(\lambda^a(k+1), c(k, x^a(k), \theta))\}.$$

Выражение в фигурных скобках неположительно, поэтому

$$q(b, \theta)-q(a, \theta) \geqslant \left(\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta), b-a\right)-(\lambda^a(0), b-a)+$$
$$+\left(\hat{f}_z(a, z^a(N), \theta)+\lambda^a(N), z^b(N)-z^a(N)\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\lambda^a(k)-\lambda^a(k+1)A(k, \theta), z^b(k)-z^a(k)).$$

В силу (4.52) отсюда имеем

$$q(b, \theta)-q(a, \theta) \geqslant \left(\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta)-\lambda^a(0, \theta), b-a\right).$$

Переходя к математическим ожиданиям, получим требуемое неравенство (4.55).

Из доказанного утверждения следует, что $\hat{f}_a(a, z^a(N), \theta)-\lambda^a(0, \theta)$ является вектором стохастического квазиградиента функции цели (4.50) в точке a. Поэтому для рассматриваемой задачи примени́м метод проектирования стохастических квазиградиентов, сводящийся к следующему.

Пусть a^0 — произвольное начальное приближение. Если после s-й итерации получено приближение a^s, то затем производится наблюдение θ^s состояния природы θ. Из (4.51), (4.52), (4.47) определяются $x^{a^s}(k, \theta^s)$, $z^{a^s}(k, \theta^s)$, $\lambda^{a^s}(k, \theta^s)$, определяется $\xi^s=\hat{f}_a\left(a^s, z^{a^s}(N), \theta^s\right)-\lambda^{a^s}(0, \theta^s)$. После этого новое приближение a^{s+1} вычисляется по обычной формуле $a^{s+1}=\pi_A(a^s-\rho_s\gamma_s\xi^s)$.

4. Оптимальная организация снабжения. Эта задача является частным случаем только что рассмотренной. Требуется организовать снабжение некоторого района с пунктами потребления $j=1, \ldots, m$ и складами

$i=1,\ldots,n$ в дискретные моменты времени $k=0,\ldots,N-1$. Для этого в момент $k=0$ на склады поставляются продукты в количестве $a_1,\ldots,a_n$ единиц (на каждом складе хранится однородный продукт), после чего снабжение района происходит со складов. Спрос пункта потребления j в момент k характеризуется случайной величиной $\theta_j(k)$ (т. е. считается, что каждый пункт j в момент k потребляет однородный продукт). Если через $z_i(k)$ обозначить состояние i-го склада (уровень запаса) в момент k, а через $x_{ij}(k)$ — величину поставки i-го склада пункту потребления j в момент времени k ($x_{ij}(k)=0$, если на i-м складе нет продукта, потребляемого j-м пунктом), то должны выполняться уравнения

$$\begin{gathered} z_i(k+1)=z_i(k)-\sum_j x_{ij}(k), \\ z_i(0)=a_i,\ i=1,\ \ldots,\ n;\ k=0,1,\ldots,N-1, \end{gathered} \tag{4.56}$$

$$\sum_i x_{ij}(k)=\theta_j(k),\ j=1,\ \ldots,\ m, \tag{4.57}$$

где суммирование происходит по тем i и j, для которых поставка из i в j имеет смысл. При этом могут быть ограничения вида

$$0\leqslant x_{ij}(k)\leqslant r_{ij}(k), \tag{4.58}$$

отражающие пропускные способности дорог из i в j;

$$0\leqslant a_i\leqslant \alpha_i,\ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{4.59}$$

или более общего вида

$$a\in A, \tag{4.60}$$

отражающие ограничения на емкость складов, величины поставок.

Необходимо учитывать следующие затраты: d_i — стоимость поставки единицы продукта в пункт i; $d_{ij}(k)$ — стоимость перевозки единицы продукта из i в j в момент времени k; d_i^+ — затраты на хранение единицы продукта в пункте i; d_i^- — затраты за недостачу единицы продукта в пункте i.

Для каждого $i=1,\ \ldots,\ n$ рассмотрим

$$d_i(z)=\begin{cases} d_i^+ z, & z\geqslant 0,\\ d_i z, & z<0. \end{cases}$$

Тогда при фиксированном начальном состоянии $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и заданных $\theta_j(k)$ оптимальный план снабжения $\{x_{ij}(k)\}$ определяется путем минимизации

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\sum_{i,j} d_{ij}(k)\,x_{ij}(k)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[d_i(z_i(N))\right] \tag{4.61}$$

при условиях (4.56) — (4.58).

Максимальное значение функции (4.61) зависит от начального состояния $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и от $\theta_j(k)$. Обозначим его через $q(a, \theta)$, где $\theta = \{\theta_j(k)\}$. Задача заключается в том, чтобы найти такое начальное состояние a, которое минимизирует функцию

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} d_i a_i + \mathsf{M} q(a, \theta)$$

при ограничениях (4.60).

Функцию (4.61) легко свести к функции, зависящей от конечного состояния системы. Для этого введем новую переменную $z_{n+1}(k)$, положив

$$z_{n+1}(k+1) = z_{n+1}(k) + \sum_{i,j} d_{ij}(k)\,x_{ij}(k). \tag{4.62}$$

Это уравнение рассматривается совместно с уравнениями (4.56), а функция (4.61) преобразуется в $\sum\limits_{i=1}^{n+1} d_i(z_i(N))$, где $d_{n+1}(x_{n+1}(N)) = x_{n+1}(N)$. Соотношения (4.60), (4.61) в данном случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} (\lambda_{n+1}(k+1)\,d_{ij}(k) - \lambda_i(k+1))\,x_{ij}(k, \theta) = \\
&\qquad = \max_{\{x_{ij}\}} \sum_{i,j} (\lambda_{n+1}(k+1)\,d_{ij}(k) - \lambda_i(k+1))\,x_{ij}, \\
&\qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \\
&\lambda_i(k) = \lambda_i(k+1), \quad \lambda_i(N) = -d_i^{\pm}, \\
&\qquad\qquad k = N-1, \ldots, 0, \quad i = 1, \ldots, n+1,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

где $d_i^{\pm}$ указывает на то, что можно взять одно из значений d_i^{+} или d_i^{-}, причем $d_{n+1}^{+} = d_{n+1}^{-} = 1$; максимум берется по всем $x_{ij}(k)$, удовлетворяющим (4.57) — (4.58) при данных k, $\theta_j(k)$, $r_{ij}(k)$. Сложность данной задачи максимизации заключается в том, что необходимо подобрать такое сочетание конечных условий в (4.63) из d_i^+ и d_i^-, чтобы для решения системы (4.56) оказалось $z_i(N)<0$, если взято d_i, и $z_i(N)>0$, если было взято d_i^+.

Поиск нужного сочетания конечных условий можно выполнить путем пробных решений. Пусть всего имеется l видов продукта, так что все склады разбиваются на l групп. Предположим, что со склада каждой из полученных групп можно сделать поставку любому потребителю, которому в какой-либо момент потребуется продукт данной группы. Тогда при минимизации (4.61) с ограничениями (4.56) — (4.58) значения $z_i(N)$ каждой из групп могут быть только неотрицательными или только неположительными, поэтому для всех i каждой из групп следует рассмотреть всего два случая: следует взять только d_i^+ или только d_i^-. В частности, если $l=1$, то для подбора конечных условий системы достаточно рассмотреть всего два случая: следует взять d_i^+ или d_i^- для всех $i=1, \ldots, n$.

§ 5. Экстремальные задачи математической статистики

1. В математической статистике рассматривается следующая задача. Имеется случайная величина (вектор) η, распределение которой определено с точностью до параметров $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Известны наблюдения $\eta^1, \ldots, \eta^N$ величины η, отвечающие значению $x=x^*$. Требуется по наблюдениям η оценить значение x^*.

Обычно при этом стремятся найти такое значение $x^N=T(\eta^1, \ldots, \eta^N)$, чтобы $\mathsf{M}x^N=x^*$ (чтобы оценка оказалась *несмещенной*), дисперсия $\mathsf{D}x^N$ принимала наименьшее значение среди других несмещенных оценок (чтобы оценка оказалась *эффективной*), $x^N \to x^*$ с вероятностью 1 (чтобы оценка оказалась *сильно состоятельной*). Однако такие оценки удается найти только для частных случаев, при сильных ограничениях на функции распределения, которые часто не выполняются в реальных задачах.

Покажем, что многие задачи оценки x^* сводятся к решению задач стохастического программирования.

2. Оценка среднего значения. Пусть η — случайный вектор с неизвестным средним $\mathsf{M}\eta$; $\eta^1, \ldots, \eta^N$ — независимые наблюдения вектора η, по которым требуется

оценить истинное значение $\mathsf{M}\eta$. Дополнительно известно, что $\mathsf{M}\eta \in X$, $X \subset R^n$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \mathsf{M}\|\eta - x\|^2$. Легко убедиться, что минимум этой функции $x^* = \mathsf{M}\eta$. Далее, для $\xi^s = -2(\eta^{s+1} - x^s)$ имеем $\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = F_x(x^s)$ и если $\rho_s = \frac{1}{2(s+1)}$, $X = R^n$, то процедура (3.20) — (3.21) имеет при $x^0 = 0$ вид

$$x^s = x^s + \frac{1}{s+1}(\eta^{s+1} - x^s) = \frac{1}{s+1}\sum_{k=1}^{s+1}\eta^k,$$

т. е. дает известную оценку среднего. Если же $X \neq R^n$, то (3.4) — (3.5) при $\xi^s = -2(\eta^{s+1} - x^s)$ дает возможность рекуррентного оценивания $\mathsf{M}\eta$ с учетом того, что $\mathsf{M}\eta \in X$.

3. Оценка моментов. Для простоты записи через η^l, $|\eta|^l$, $(\eta - \mathsf{M}\eta)^l$ обозначим векторы

$$(\eta_1^l, \ldots, \eta_n^l), \ (|\eta_1|^l, \ldots, |\eta_n|^l),$$
$$((\eta_1 - \mathsf{M}\eta_1)^l, \ldots, (\eta_n - \mathsf{M}\eta_n)^l).$$

Аналогично предыдущему пункту моменты $\mathsf{M}\eta^l$, $\mathsf{M}|\eta|^l$ являются точками минимума функций $F(x) = \mathsf{M}\|\eta^l - x\|^2$, $F(x) = \mathsf{M}\||\eta|^l - x\|^2$, и в этих случаях в (3.4) — (3.5) или в (3.20) — (3.21) можно взять $\xi^s = -2((\eta^{s+1})^l - x^s)$, $\xi^s = -2(|\eta^{s+1}|^l - x^s)$.

Момент $\mathsf{M}(\eta - \mathsf{M}\eta)^l$ является точкой минимума функции $F(x) = \mathsf{M}\|(\eta - \mathsf{M}\eta)^l - x\|^2$. В этом случае можно взять

$$\xi^s = -2\left(\prod_{k=1}^{l}(\eta^{s+1} - \eta^{s+1+k}) - x^s\right).$$

Очевидно, для определенных таким образом величин ξ^s имеем $\mathsf{M}(\xi^s/x^s) = F_x(x^s)$ (для соответствующей функции $F(x)$).

4. Метод наименьших квадратов. Предположим, что среднее значение $\mathsf{M}\eta$ является известной вектор-функцией $r(x_1, \ldots, x_n)$ от неизвестных параметров $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Наблюдаются $\eta_1, \ldots, \eta_N$ при $x = x^*$, и требуется по этим наблюдениям оценить x^*.

Рассмотрим $F(x) = \mathsf{M}\|\eta - r(x)\|^2$. Так как для наблюдаемых случайных величин $\mathsf{M}\eta = r(x^*)$, то искомое значение x^* минимизирует $F(x)$. Если $r(x)$ — гладкая функция, то можно взять $\xi^s = -2(\eta_{s+1} - r(x^s), r_x(s^s))$.

5. Метод максимального правдоподобия. В отличие от предыдущего случая, когда была известна зависимость среднего η от искомых параметров x, предположим, что известна плотность распределения $p(x, h)$ с мерой $\mu(dh)$. Наблюдения $\eta^1, \ldots, \eta^N$ отвечают $x = x^*$, и требуется оценить x^*.

При каждом x можно рассмотреть случайные величины $p(x, \eta^1), \ldots, p(x, \eta^N)$ и функцию

$$F(x) = \mathbf{M} \ln p(x, \eta) = \int \ln p(x, h)\, p(x^*, h)\, \mu(dh).$$

Искомое значение x^* является точкой максимума $F(x)$. Дей твительно,

$$F(x) - F(x^*) = \int \ln \frac{p(x, h)}{p(x^*, h)}\, p(x^*, h)\, \mu(dh).$$

Так как $\ln x < x - 1$, то

$$F(x) - F(x^*) < \int \left(\frac{p(x, h)}{p(x^*, h)} - 1 \right) p(x^*, h)\, \mu(dh) =$$
$$= \int p(x, h)\, \mu(dh) - \int p(x^*, h)\, \mu(dh) = 0.$$

Все рассмотренные выше задачи были задачами поиска оценок неизвестных параметров x при дополнительной информации о том, что $x \in X$. Как показывает практика, учет дополнительной информации позволяет повысить эффективность оценок при малых выборках.

§ 6. Моделирование и оптимизация. Численные расчеты

1. Каждый шаг человеческой деятельности связан с выбором какого-либо решения. Конструктор, скажем, принимает решение о параметрах проектируемой системы, военачальник — о проведении военной операции, домохозяйка — о распределении бюджета семьи. К сожалению, нередко спустя некоторое время мы убеждаемся в том, что принятые нами решения оказались неудовлетворительными с некоторых точек зрения, или, как еще говорят, неоптимальными. Ошибочность принимаемых решений может привести к самым тяжелым последствиям, поэтому вполне естественным должно быть стремление человека по возможности к наилучшим решениям и

развитию стандартных научно обоснованных процедур их выбора. Одной из таких процедур и является моделирование.

По мере своего развития люди занимаются систематизацией различных фактов о происходящих вокруг процессах, создают модели, которые позволяют им правильно ориентироваться в окружающей обстановке, предвидеть последствия принимаемых решений и выполнять наиболее подходящие действия. На качество решения влияют различные факторы, и для оценки их прибегают к самым разнообразным средствам моделирования: составляются системы уравнений, описывающие и объясняющие внутреннюю связь между интересующими показателями; строятся аналоговые или макетные установки; производятся различные тренировки, учения, испытания, на которых воспроизводятся нужные ситуации и «прослеживаются» имеющие место связи. Условно все средства моделирования можно разбить на две группы — *математические* и *имитационные* — и в соответствии с этим говорить о *математическом* или *имитационном моделировании*.

2. До недавнего времени моделирование широко применялось в основном в области физики и техники. За последние 50 лет в моделировании происходят изменения, благодаря которым оно начинает внедряться буквально во все сферы человеческой деятельности и занимать центральное место в социальных науках. Эти изменения связаны с развитием ряда новых математических дисциплин, таких, как теория игр, линейное и нелинейное программирование, теория оптимального управления и др., и с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Дело в том, что классические математические и имитационные модели позволяют предсказывать поведение моделируемых процессов при определенных, фиксированных условиях. В тех случаях, когда требуется найти условия, обеспечивающие наилучшее протекание интересующих процессов, необходимо прибегать или к аналитическим исследованиям, или к перебору некоторых вариантов. Однако аналитическими средствами удается проанализировать относительно несложные ситуации, а простой перебор вариантов не дает никакой уверенности в том, что не оставлены без внимания существенно лучшие варианты. В связи с этим возникает вопрос об организации процедур целенаправленного перебора вариантов, т. е. процедур их последовательного улучшения. ЭВМ позволили существенно усовершенствовать метод простого перебора вариантов. Появилась возможность не только оценить значительно большее количество вариантов, но и организовать своеобразный диалог принимающего решения с ЭВМ, в котором машина оценивает варианты, а принимающий решение в зависимости от предыдущих расчетов строит новые варианты и предлагает их машине. При переборе вариантов на ЭВМ допустимое множество не обязательно должно быть задано перечислением его элементов, как это обычно делается при расчетах «вручную», оно может быть дано алгоритмически, и тогда машина сама по составленной программе строит и оценивает допустимые варианты.

При этом правила перебора вариантов могут быть детерминированными и случайными, в них может быть заложена интуиция специалистов, их определенные эвристические соображения (иногда в этом случае говорят уже о методах эвристического программирования). Методы простого перебора вариантов с применением ЭВМ являются весьма гибкими, их легко реализовать любому специалисту, понимающему специфику задачи. Эти методы позволяют сочетать весь арсенал средств моделирования: прерывая, скажем, в определенный момент расчеты на ЭВМ, можно обращаться к макетным или аналоговым установкам, дополнять «общую картину», а затем снова переходить к расчетам на ЭВМ или аналитическим выкладкам. Однако методы простого перебора вариантов имеют и существенные недостатки. Эти методы, как показывает практика, дают хорошие результаты при решении задач комбинаторного типа (с конечным числом допустимых вариантов), в которых легко строить произвольное допустимое решение (легко описать правила его построения). Расширение сфер применения моделирования, в частности формализация процессов технико-экономического планирования в системах, составленных из большого числа взаимосвязанных элементов, приводит к задачам со значительным и даже бесконечным числом допустимых решений, в которых чрезвычайно трудно строить отдельные допустимые решения.

Очевидно, в задачах с бесконечным числом допустимых вариантов перебор вариантов следует организовать только по наиболее перспективным направлениям. Каковы эти направления? Как найти оптимальное решение в том случае, когда поиск даже отдельного допустимого решения является сложной задачей?

Эти вопросы и находятся в центре внимания указанных выше математических дисциплин (линейного и нелинейного программирования и др.), о которых часто говорят как о разделах теории оптимальных решений или теории оптимизации. Наряду с методом простого перебора вариантов (там, где он применим), эта теория стремится указать процедуры, существенно сокращающие количество «просматриваемых» вариантов. Например, в задачах линейного программирования с бесконечным числом допустимых вариантов по симплекс-методу перебор осуществляется только по незначительному, конечному числу точек допустимого множества. В линейном программировании есть и такие процедуры, в которых вообще не перебираются допустимые варианты, а постепенно строится один вариант, который сразу будет и допустимым и оптимальным. Теория оптимизации имеет дело с моделями, в которых отражены цели исследователя, способы их достижения и имеющиеся для этого средства. Она не только помогает разобраться в изучаемом процессе, но и указывает пути изменения его в нужную сторону при имеющихся возможностях. Чем более лимитирующими становятся «ресурсы» исследователя, т. е. чем более глобальными вопросами он начинает заниматься, тем большее значение должны приобретать модели этой теории.

3. В современной теории оптимальных решений изучаются проблемы выбора решений в самых различных ситуациях (индивидуальный выбор решений, конфликтные ситуации, ситуации с неопределенностью и риском и т. п.).

Главный, как нам кажется, недостаток этой теории связан с тем, что она пока ориентируется в основном на математические средства моделирования и недостаточно внимания уделяет вопросам оптимизации на основе имитационных моделей. Обычно предполагается, что модель взаимодействия факторов, влияющих на качество решения, задана легко обозримыми соотношениями, которые можно проанализировать и выбрать нужные направления поиска.

В имитационных моделях нет таких зависимостей, они скрыты от глаз наблюдателя и можно анализировать только отдельные случайные проявления последствий принятых решений. Ситуация здесь во многом напоминает ту ситуацию, с которой имеет дело математическая статистика, изучающая закономерности по их отдельным случайным проявлениям.

Отличие и сложность задачи оптимизации на основе имитационных моделей заключается в том, что анализируемые здесь закономерности не являются неизменными, а меняются с изменением решения. Оценка каждого допустимого решения путем многократной имитации интересующего процесса может занять значительное время, и при значительном числе допустимых вариантов поиск удовлетворительного (не говоря уже об оптимальном) решения без направленных процедур вряд ли возможен.

Особую важность вопросы оптимизации в области имитационного моделирования приобретают в связи с развитием вычислительной техники. Современные ЭВМ дали в руки исследователей новое мощное средство имитационного моделирования. Благодаря ЭВМ стало возможным заниматься имитацией процессов, изучаемых в социальных науках, т. е. в той области, где математические модели могут оказаться безнадежно сложными, а натурное экспериментирование обходится слишком дорого, и им нельзя пользоваться в такой же мере, как, скажем, в физике. Например, стало возможным многократно воспроизводить процессы движения транспорта в транспортных сетях, процессы вооруженной борьбы, экономического развития.

4. Покажем, что развитие методов оптимизации в имитационном моделировании можно связать с развитием прямых методов стохастического программирования. Действительно, если произвольную имитацию изучаемого процесса обозначить через θ и предположить, что она носит случайный характер, то имитационная модель позволяет наблюдать при каждом решении x некоторые случайные показатели $f^{\nu}(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, зависящие от θ. В процессе имитации часто стремятся найти такое x, при котором среднее значение показателя $f^{0}(x, \theta)$ принимает наименьшее значение при определенных ограничениях на средние значения остальных показателей

$f^i(x, \theta)$, $i=1, \ldots, m$. То есть требуется решить задачу стохастического программирования, например, следующего вида:

Минимизировать

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta)$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$x \in X.$$

Имитационное моделирование связано с разработкой *сценариев* поведения интересующих объектов. Каждый сценарий может состоять из ряда аналитических моделей и зависимостей, связанных определенными логическими, вероятностными переходами, а его исполнителями могут быть вычислительные машины, реальные объекты, люди. Прямые методы стохастического программирования позволяют по информации, получаемой в результате «проигрывания» сценариев, строить своеобразный адаптивный процесс поиска неизвестных решений.

С этих точек зрения задачу минимизации функции регрессии (4.1) можно интерпретировать следующим образом. Имеется один сценарий, каждое проигрывание которого дает случайную величину $f(x, \theta)$, характеризующую затраты, связанные с решением x. Требуется найти x, которое минимизирует ожидаемые затраты (4.1). Согласно (4.2), (4.5) происходит своеобразный адаптивный процесс поиска точки минимума функции (4.1), минуя сложный и практически нереализуемый процесс определения аналитических зависимостей для математических ожиданий.

В игровой стохастической задаче (4.6) — (4.7) при $Y = \{1, \ldots, K\}$ можно считать, что имеется ряд сценариев $k=1, \ldots, K$, в каждом из которых величина $f(x, k, \theta)$ характеризует затраты, связанные с планом x, а путем проигрывания сценариев требуется найти x, которое минимизирует ожидаемые максимальные затраты (4.6) при условиях (4.7). При этом одна итерация стохастического квазиградиентного метода (3.4) — (3.5) с использованием, допустим, направления (4.8) состоит из следующих операций. Имеется точка x^s. Проигрывая сценарий, наблюдаем $f(x^s, k, \theta^s)$ и определяем k_s из условия

$f(x^s, k^s, \theta^s) = \max\limits_k f(x^s, k, \theta^s)$; вычисляем ξ^s по формуле (4.8), x^{s+1} по формуле (3.4) и т. д.

При такой организации вычислений легко комбинировать аналитические зависимости с имитацией отдельных процессов на ЭВМ. Например, функции $f(x, k, \theta)$ при каждом k и θ могут иметь простое аналитическое выражение, и тогда направление движения в процессе (3.4) — (3.5) определяется по формуле (4.8) или (4.13), а наблюдение θ — путем имитации случайного процесса на ЭВМ.

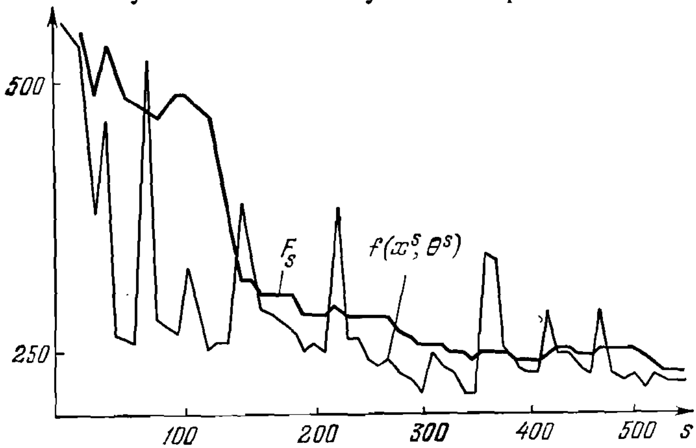

Рис. 8

В двухэтапной задаче стохастический квазиградиент также вычисляется исходя из аналитического выражения (4.21) или (4.24) с использованием решения $u(x^s, \theta^s)$ двойственной задачи, а наблюдение θ^s может быть получено путем имитации случайных помех.

5. Остановимся на некоторых результатах численных расчетов на ЭВМ реальных задач стохастического программирования. На рис. 8 показан типичный график поведения значений величин $f(x^s, \theta^s)$ и $F_s = (1/s) \sum\limits_1^s f(x^k, \theta^k)$ функции цели $F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta)$ для задач оптимального планирования машинно-тракторного парка (дополнение 3 этой главы). Поведение $f(x^s, \theta^s)$, естественно, носит нерегулярный характер, но имеется тенденция к убыванию

«в среднем». Поэтому, если наряду с $f(x^s, \theta^s)$ рассматривать значения $F_s = (1/s)\sum_1^s f(x^k, \theta^k)$ или, в более общем случае, $F_s = \sum_1^s \delta_k f(x^k, \theta^k)/\sum_1^s \delta_k$, $\delta_k \geqslant 0$, то поведение F_s будет иметь явную тенденцию к убыванию. При этом, поскольку функция цели $F(x)$ негладкая, то немонотонное поведение F_s имеет закономерный характер даже при отсутствии помех. Общее число независимых переменных в задаче рис. 8 около 4000. За первые 300 итераций функция цели в среднем уменьшилась от 500 до 250, после чего имеет место медленное убывание. Такое положение характерно для численного решения задач стохастического программирования и вполне согласуется с тем, что асимптотическая скорость сходимости стохастических квазиградиентных методов (вблизи решения), как отмечалось в § 7 гл. III, не может быть большой. Реальная скорость сходимости может быть значительно увеличена за счет разумного выбора шага спуска ρ_s. Типичные требования, которым он должен удовлетворять, суть $\rho_s \geqslant 0$, $\sum \rho_s = \infty$, $\sum \rho_s^2 < \infty$, и им удовлетворяет выбор $\rho_s = c_s/s$, где c_s — некоторая равномерно ограниченная переменная $\bar{c} \geqslant c_s \geqslant \geqslant \underline{c} > 0$. Величину c_s можно менять в зависимости от поведения величины F_s, при этом F_s будет слабо изменяться в том случае, если ρ_s выбрано слишком большим или слишком малым. Изменять c_s в зависимости от F_s можно или автоматически, или в режиме диалога с ЭВМ.

Дополнения к главе IV

1. О численных методах оперативного стохастического программирования. Как отмечалось в § 3 гл. I, общие постановки задач оперативного стохастического программирования являются усложнением задач нелинейного программирования в абстрактных пространствах. Именно, пусть $(\Theta, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ — исходное вероятностное пространство, $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{T}$ Требуется найти измеримую относительно $\mathcal{B}$ вектор-функцию $x(\theta)$, которая минимизирует функционал

$$F^0(x(\theta)) = \mathrm{M} f^0(x(\theta), \theta) \tag{4.64}$$

при ограничениях

$$F^i(x(\theta)) = \mathrm{M} f^i(x(\theta), \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.65}$$

$$x(\theta) \in X, \tag{4.66}$$

где значения функционалов $I^{\nu}(x(\theta))$ и их производных, как и в задачах перспективного стохастического программирования, точно не вычисляются

Найти решение этой задачи в классе функций $x(\theta)$ в общем случае невозможно, поэтому, как уже неоднократно отмечалось, в задачах оперативного стохастического программирования обычно применяют приемы параметризации, сводящие их к конечномерным задачам перспективного стохастического программирования. Этого же иногда достигают введением апостериорного риска (см. дополнение 9) Это практически возможные пути решения задачи (4.64)—(4.66)

Если же к задаче (4.64)—(4.66) подойти чисто формально, то для ее решения нетрудно предложить бесконечномерные аналоги методов, рассмотренных в предыдущих параграфах, что можно сделать чисто формально, заменяя в большинстве случаев слово «вектор» на слово «элемент», если соответствующим образом ввести понятие условного математического ожидания случайной функции со значениями в абстрактном пространстве Поэтому остановимся на необходимых для этих целей понятиях.

Как известно, для функций, принимающих значения в банаховом пространстве B, можно ввести два понятия измеримости: сильная измеримость и слабая измеримость.

Функция $x(\omega)$, заданная на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, где $\mathsf{P}\{\Omega\} < \infty$, и принимающая значения из банахова пространства B, называется *сильно измеримой*, если существует последовательность простых функций, сходящаяся к $x(\omega)$ почти всюду на Ω.

Функция $x(\omega)$ называется *простой*, если существует конечное число непересекающихся измеримых множеств $A_i \subset \Omega$, на каждом из которых $x(\omega)$ — постоянная и $x(\omega)=0$ на $\Omega \setminus \bigcup A_i$, причем множество $\{\omega: \|x(\omega)\| > 0\}$ имеет конечную меру

Функция $x(\omega)$ называется *слабо измеримой*, если для каждого линейного функционала $f \in B^*$ сложное отображение $f(x(\omega))$ является измеримой числовой функцией

Если пространство B сепарабельное, то два определения измеримости функций эквивалентны

Вводятся и два понятия интегрируемости для функций, принимающих значения в банаховом пространстве: интеграл Петтиса и интеграл Бохнера Последний уступает интегралу Петтиса в общности, так как по Бохнеру можно интегрировать только функции, принимающие значения из сепарабельного пространства, чего не требуется для интегрируемости по Петтису. Но для интеграла Петтиса не всегда из факта $\int_A h(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \int_A g(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$ для каждого измеримого множества A следует равенство $h(\omega)$ и $g(\omega)$ почти всюду по мере P, т е. нельзя говорить о классе эквивалентности интегрируемых функций

Функция $h(\omega)$ *интегрируема по Бохнеру*, если существует последовательность $h_l(\omega)$ простых функций, сильно сходящихся к $h(\omega)$ P-почти всюду в Ω так, что

$$\lim_{l\to\infty} \int_\Omega \| h_l(\omega) - h(\omega) \| \, \mathsf{P}(d\omega) = 0$$

(под $\|\cdot\|$ понимается норма в пространстве B). Для любого множества $A \in \mathscr{A}$ интеграл Бохнера функции $h(\omega)$ по множеству A определяется как

$$\int\limits_A h(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = s - \lim_{l\to\infty} \int\limits_\Omega \chi_A(\omega)\, h_l(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$$

(s — lim — сходимость по норме $\|\cdot\|$ в пространстве B, а $\chi_A(\omega)$ — характеристическая функция множества A).

Теорема Бохнера. *Для того чтобы сильно измеримая функция $h(\omega)$ была P-интегрируема по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы $\|h(\omega)\|$ была P-интегрируема.*

А теперь дадим определение случайного элемента, охватывающее определение случайной величины в классической теории вероятностей.

Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, B — банахово пространство с σ-алгеброй $\mathscr{L}$ всех борелевских подмножеств пространства B Отображение η пространства Ω в пространство B называется *случайным элементом* (со значениями в банаховом пространстве B), если прообраз каждого борелевского множества B принадлежит σ-алгебре $\mathscr{A}$, т. е.

$$\{\{\omega:\ \eta(\omega) \in E\}:\ E \in \mathscr{L}\} \in \mathscr{A}.$$

Если случайный элемент $\eta(\omega)$ рассматривать в сепарабельном пространстве B, то только что данное определение случайного элемента будет эквивалентно определению сильной и слабой измеримости функций в пространстве B, поэтому математическое ожидание случайного элемента $\eta(\omega)$ можно ввести как интеграл Бохнера от функции $\eta(\omega)$ и обозначить его

$$\mathsf{M}\eta(\omega) = \int\limits_\Omega \eta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega).$$

Можно ввести и понятие условного математического ожидания.

Пусть $\eta(\omega)$ — случайный элемент, математическое ожидание которого существует Пусть $\mathscr{B}$ — такая σ-подалгебра подмножеств из Ω, что $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ Тогда каждый случайный элемент $\vartheta(\omega)$, если он существует, измеримый относительно $\mathscr{B}$, т е.

$$\{\{\omega:\ \vartheta(\omega) \in E\}:\ E \in \mathscr{L}\} \in \mathscr{B},$$

и такой, что равенство

$$\int\limits_A \vartheta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega) = \int\limits_A \eta(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$$

имеет место для каждого множества $A \in \mathscr{B}$, будет называться *условным математическим ожиданием случайного элемента $\eta(\omega)$ относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}$* и обозначаться $\mathsf{M}(\eta/\mathscr{B})$.

Для случая $B = R^1$ это определение совпадает с классическим. В классической теории вероятностей для каждой случайной величины, имеющей математическое ожидание, и для каждой σ-подалгебры $\mathscr{B}$ существует условное математическое ожидание. В случае случайных элементов аналогичный результат утверждает следующая теорема:

Теорема. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство, B — сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ и $\eta(\omega)$ — случайный элемент. Тогда условное математическое ожидание существует тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Omega} \| \eta(\omega) \| \mathrm{P}(d\omega) < \infty.$$

2. Долгосрочное планирование. В работе [32] изучалась следующая двухэтапная стохастическая модель оптимального планирования. Предприятие (отрасль, народное хозяйство) выпускает продукцию m видов, спрос на которую в k-м периоде, $k = 0, 1, \ldots, N$, характеризуется вектором $b(k, \theta) = (b_1(k, \theta), \ldots, b_m(k, \theta))$; $H(k, \theta)$ — технологическая матрица размерности $m \times n_k$, элементы которой характеризуют нормы затрат при использовании технологических способов с единичной интенсивностью в k-м периоде; $c(k)$ — n_k-мерный вектор, компоненты которого показывают издержки от использования технологических способов с единичной интенсивностью в k-м периоде; $q^+(k, \theta)$ — m-мерный случайный вектор цен на продукцию, выпускаемую в $(k-1)$-м периоде; $q^-(k, \theta)$ — m-мерный случайный вектор, компоненты которого характеризуют издержки от хранения единицы готовой продукции в $(k-1)$-м периоде; $x(k)$ — n_k-мерный детерминированный вектор использования технологических способов в k-м периоде.

Излишки продукции, если таковые имеются, остаются на складе с тем, чтобы быть проданными в следующем периоде. Пусть $D(k, \theta)$ — диагональная матрица размерности $m \times m$, элементы которой $0 \leqslant d_i(k, \theta) \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$, показывают, какая часть продукции, положенной на склад в начале k-го периода, останется годной для продажи к концу k-го периода; $(x(0), \ldots, x(N-1))$ — некоторый допустимый план выпуска, для которого $x(k) \in X(k)$, где $X(k)$ — множество допустимых интенсивностей в k-м периоде, которое предполагается выпуклым и замкнутым; $y^+(k)$, $y^-(k)$ — m-мерные неотрицательные векторы, показывающие превышение спроса над предложением и превышение предложения над спросом в $(k-1)$-м периоде.

Требуется найти план $(x(0), \ldots, x(N-1))$, который минимизирует ожидаемые затраты

$$\sum_{k=0}^{N-1} (c(k), x(k)) +$$

$$+ M \sum_{k=1}^{N} [(q^+(k, \theta), y^+(k, x, \theta)) + (q^-(k, \theta), q^-(k, x, \theta))]$$

при условии, что $x(k) \in X(k)$, где $y^+(k, x, \theta)$, $y^-(k, x, \theta)$ являются решением следующей задачи:

Минимизировать (при данных θ, $x(k)$, $k = 1, \ldots, N$)

$$\sum_{k=1}^{N} \{(q^+(k, \theta), y^+(k)) + (q^-(k, \theta), y^-(k))\} \qquad (4.67)$$

при условиях

$$y^+(k+1)-y^-(k+1)+D(k,\ \theta)\,y^-(k)=b(k,\ \theta)-A(k,\ \theta)\,x(k),\qquad (4.68)$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$
$$y^+(k)\geqslant 0,\quad y^-(k)\geqslant 0,\quad k=1,\ \ldots,\ N,\qquad (4.69)$$
$$(y^+(k),\ y^-(k))=0.\qquad (4.70)$$

Векторы $y^+(k,\ x,\ \theta)$, $y^-(k,\ x,\ \theta)$ называются *векторами оптимальной коррекции плана* $x(k)$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, в состоянии θ.

Если с вероятностью 1

$$q^+(k+1,\ \theta)\,D(k,\ \theta)-q^+(k)<q^-(k),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$
$$q^+(N)+q^-(N)>0,$$

то условия (4.70) выполняются автоматически на векторах оптимальной коррекции $y^+(k,\ x,\ \theta)$, $y^-(k,\ x,\ \theta)$ и их можно не учитывать. В этом случае двойственная к (4.67)—(4.70) задача имеет такой вид:

Максимизировать

$$\sum_{k=0}^{N-1}(u(k),\ b(k,\ \theta)-A(k,\ \theta)\,x(k))$$

при условиях

$$u(k+1)\,D(k+1,\ \theta)-u(k)\leqslant q^-(k+1,\ \theta),$$
$$u(k)\leqslant q^+(k+1),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-2,$$
$$-q^-(N,\ \theta)\leqslant u(N-1)\leqslant q^+(N,\ \theta)$$

Благодаря специальной структуре решение этой задачи сводится к простым операциям: сначала по рекуррентному соотношению (4.68) определяются $y^+(k)$, $y^-(k)$ так, чтобы выполнялись при этом соотношения (4.70). Это можно сделать однозначно, причем получаемые векторы оказываются решениями $y^+(k,\ x,\ \theta)$, $y^-(k,\ x,\ \theta)$ задачи (4.67)—(4.70). Искомое решение $(u,\ (k,\ x,\ \theta),\ \ldots,\ u_m(k,\ x,\ \theta))$ двойственной задачи отыскивается следующим образом: для каждого $i=1,\ \ldots,\ m$

$$u_i(N-1,\ x,\ \theta)=\begin{cases} q_i^+(N,\ \theta), & y_i^+(N,\ x,\ \theta)\geqslant 0,\\ q_i^-(N,\ \theta), & y_i^-(N,\ x,\ \theta)>0;\end{cases}$$

если $y_i^+(k,\ x,\ \theta)\geqslant 0$, то $u_i(k-1,\ x,\ \theta)=q_i^+(k,\ \theta)$; если $y_i^-(k,\ x,\ \theta)>0$, то $u_i(k-1,\ x,\ \theta)$ определяется из соотношения

$$u_i(k,\ x,\ \theta)\,d_i(k,\ \theta)-u_i(k,\ x,\ \theta)=q_i^-(k,\ \theta)$$

Поскольку $(y^+(k,\ x,\ \theta),\ y^-(k,\ x,\ \theta))=0$, то эти условия однозначно определяют двойственные переменные $u(k,\ x,\ \theta)$ Следовательно, в данном случае легко определить стохастический квазиградиент (4.21).

3. Модель выбора оптимального состава машинно-тракторного парка Пусть $b_i(k)$ — объем работы i-го вида (уборочная, посевная и т. п.) в k-й календарный период, $x_{ij}(k)$ —

число агрегатов j-го вида на i-м виде работ в k-й календарный период; $W_{ij}(k)$ — сменная производительность агрегатов Тогда

$$\sum_j W_{ij}(k)\, x_{ij}(k) = b_i(k), \qquad x_{ij}(k) \geqslant 0.$$

Требуется минимизировать нелинейную функцию

$$\sum_{i,\,j,\,k} c_{ij}(k)\, x_{ij}(k) + \sum_j \left(\max_k \sum_i x_{ij}(k) \right) \lambda_j,$$

где $c_{ij}(k)$ — сменные затраты, λ_j — коэффициент годовых отчислений. Предположим, что $b_i(k)$ — случайные величины

$$y_i^+(k) = b_i(k) - \sum_j W_{ij}(k)\, x_{ij}(k), \quad \text{если} \quad b_i(k) \geqslant \sum_j W_{ij}(k)\, x_{ij}(k);$$

$$y_i^-(k) = \sum_j W_{ij}(k)\, x_{ij}(k) - b_i(k), \quad \text{если} \quad b_i(k) < \sum_j W_{ij}(k)\, x_{ij}(k).$$

Задачу выбора оптимального состава машинно-тракторного парка можно представить как двухэтапную задачу стохастического программирования с матрицей коррекций, определяемой величинами $y_i^+(k)$, $y_i^-(k)$

4. З а д а ч а р е з е р в и р о в а н и я. Имеется система, характеризуемая графом, вершины которого отвечают ее элементам, а дуги — связям между элементами Известна вероятность отказа в зависимости от срока работы элементов Требуется определить необходимое резервное количество ненадежных элементов, где они должны быть сосредоточены с учетом необходимого времени доставки и стоимости доставки. Эту задачу можно сформулировать как стохастическую задачу транспортного типа

5. П р о ц е с с у п р а в л е н и я с а д а п т а ц и е й Применению метода стохастической аппроксимации в процессах управления с адаптацией посвящено много работ Методы адаптивного управления применяются в том случае, когда для управляемого процесса нет точной модели, а имеется возможность наблюдать случайную реакцию объекта $f(x, \theta)$ на управляющее воздействие x.

Например (см. [4]), требуется поддерживать вязкость на выходе некоторого химического процесса как можно ближе к заданному уровню. Управляющим воздействием является значение параметра x, определяющего положение клапана, регулирующего водяное охлаждение в теплообменнике системы. Сначала клапан устанавливается в некоторое промежуточное положение x^0. Ровно через 15 минут измеряется вязкость $f(x^0, \theta^0)$, в зависимости от чего устанавливается новое положение клапана x^1, наблюдается через 15 минут $f(x^1, \theta^1)$ и т. д.

Таким образом, в задачах управления с адаптацией для любой последовательности управлений x^0, x^1, ... наблюдается реакция $f(x^0, \theta^0)$, $f(x^1, \theta^1)$, ... , причем предполагается, что последовательность $f(x^s, \theta^s)$ — последовательность с независимыми значениями и $\mathsf{M}\,(f\,(x^s, \theta^s)/x^s) = F\,(x^s)$, т. е. вероятностные характеристики величины $f(x^s, \theta^s)$ не зависят от s. Требуется найти такую последовательность управлений $x^0, x^1, \ldots$, для которой при $s \to \infty$

$$\lim_{s \to \infty} F(x^s) = \text{const}$$

В этом случае последовательность $x^0, x^1, \ldots$ можно выбирать согласно методу стохастической аппроксимации. Стохастические квазиградиентные методы позволяют оптимизировать более общие функции $F(x)$ при ограничениях на управляющие воздействия. Например, метод (3.35) — (3.36) позволяет выбирать последовательность управляющих воздействий $x^0, x^1, \ldots$ так, чтобы

$$\lim_{s \to \infty} \mathsf{M}\,(f^0(x^s, \theta^s)/x^s) = \min \mathsf{M} f(x, \theta)$$

при условии, что

$$\lim_{s \to \infty} \mathsf{M}\,(f^i(x^s, \theta^s)/x^s) \leqslant 0.$$

6. Управление дискретной системой. Предположим, что имеется управляемый объект с конечным числом состояний $i = 1, \ldots, m$ и конечным множеством управлений $j = 1, \ldots, n$. Если на объект действует управление j, то существует вероятность $p_i(j)$ того, что он перейдет в состояние i, причем c_i — затраты на пребывание в этом состоянии (в c_i учитываются непосредственные расходы на пребывание в состоянии i, затраты за совершаемые действия и т. п.). Тогда при управлении j ожидаемые затраты равны

$$f(j) = \sum_{i=1}^{m} c_i p_i(j)$$

Вероятности $p_i(j)$ не заданы, но точно известны состояния, в которые объект переходит под действием управлений. Требуется найти такое управление j, для которого $f(j)$ принимает минимальное значение.

Как заметил Н. Н. Красовский на семинаре в г. Вяймела, эта дискретная задача легко сводится к минимизации некоторой функции регрессии при простейших ограничениях. Именно, перейдем к смешанным стратегиям, т. е. рассмотрим совокупность чисел x_j, $j = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, $x_j \geqslant 0$, и функцию

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} f(j)\, x_j.$$

Очевидно, минимизация $F(x)$ в указанной области равносильна поставленной задаче. Если в s-й итерации при управлении j объект оказался в состоянии с затратами f_j^s, то вектор $\xi^s = (f_1^s, \ldots, f_n^s)$ является стохастическим градиентом функции $F(x)$, т. е. $\mathsf{M}\,(\xi^s/x^s) = F_x(x^s)$; поэтому поставленная задача легко решается стохастическим квазиградиентным методом с использованием операции проектирования.

7. Задача распознавания и обучения. Приведем те замечания, которые по поводу этих задач имеются в [61]. Основная задача распознавания состоит в отнесении предъявляемого объекта к одному из классов, вообще говоря, заранее неизвестных. Для решения задачи распознавания необходимо прежде всего заняться обучением посредством показа образов, принадлежность которых к тому или иному классу известна. С геометрической точки зрения каждому объекту можно поставить в соответствие точку в некотором многомерном пространстве. Предположим, что выполнена гипотеза компактности: сходным объектам соответствуют близкие точки, и существует некоторая функция, которая разделяет точки различных классов. Тогда задачи обучения сводятся к задачам аппроксимации разделяющей функции.

Пусть имеется два класса $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$. Обозначим разделяющую функцию через $y=\psi(\theta)$, где θ — вектор, характеризующий образ, y — величина, определяющая класс, к которому этот образ принадлежит. Можно предположить, например, что

$$\operatorname{sign}\psi(\theta)=\begin{cases} 1, & \theta\subset\mathscr{L}, \\ -1, & \theta\in\mathscr{M}. \end{cases}$$

Обозначим класс аппроксимирующих функций через $\varphi(x, \theta)$, где x — неизвестный пока вектор коэффициентов. Чаще всего выбирается

$$\varphi(x, \theta)=\sum_{j=1}^{n} x_j\varphi_j(\theta),$$

где $\varphi_j(\theta)$ — известные функции. Мера уклонения определяется как выпуклая функция разности $f(\psi(\theta)-\varphi(x, \theta))^2$, например, $(\psi(\theta)-$ $-\varphi(x, \theta))^2$. Векторы (образы) θ показываются случайным образом, поэтому коэффициенты $x=(x_1, \ldots, x_n)$ определяются из условия минимума

$$F(x)=\mathsf{M}f(\psi(\theta)-\varphi(x, \theta)).$$

Вероятностное распределение векторов θ, в соответствии с которым происходит их выборка, неизвестно, поэтому для минимизации $F(x)$ естественно применять методы стохастической аппроксимации [1], [61], а для общих функций, например, если $F(x)$ негладкая, когда $f(\psi(\theta)-\varphi(x, \theta))=|\psi(\theta)-\varphi(x, \theta)|$, применимы стохастические квазиградиентные методы.

8. Интересно сопоставить постановку задачи Тинтера (2.45), (2.41) с общей постановкой двухэтапной задачи стохастического программирования и применить к задаче Тинтера численный метод, описанный в примере 1 п. 4 § 3.

9. Статистические решения. Байесовский подход. Пусть Θ — множество состояний природы; Ω — множество исходов эксперимента; X — множество решений (действий) статистика, $X\subset R^n$; $x(\omega)$ — решающая функция, которая каждому исходу ω ставит в соответствие действие $x(\omega)\in X$; $p(\theta, \omega)$ — вероятность того, что в состоянии природы θ эксперимент приведет к исходу ω; $f(x, \theta)$ — функция потерь статистика при выборе x, если природа

находится в состоянии θ. Тогда риск, отвечающий $x(\omega)$, в состоянии θ есть (для не более чем счетного Ω)

$$F(x(\omega),\ \theta)=\sum_{\omega} f(x(\omega),\ \theta)\, p(\theta,\ \omega).$$

Если $\nu(\theta)$ — априорное распределение состояний θ, то риск характеризуется функционалом (Θ — не более чем счетное множество)

$$F(x(\omega))=\int \sum_{\omega} f(x(\omega),\ \theta)\, p(\theta,\ \omega)\, \nu(d\theta).$$

Минимизация функционала $F(x(\omega))$ сводится к решению серии конечномерных задач, поскольку, как легко убедиться, оптимальное значение $x(\omega)$ должно минимизировать при данном ω

$$\varphi(x)=\int f(x,\ \theta)\, p(\theta,\ \omega)\, \nu(d\theta),$$

где $x \in X$, или апостериорный риск, который от $\varphi(x)$ отличается сомножителем $1/\int p(\theta,\ \omega)\, \nu(d,\ \theta)$.

Применить для минимизации $\varphi(x)$ при наблюдаемом ω стохастические квазиградиентные методы.

ГЛАВА V

ОБОБЩЕНИЯ

В этой главе обобщаются результаты предыдущих глав. С одной стороны, развиваются стохастические квазиградиентные методы минимизации негладких и невыпуклых функций, которые применяются для решения сложных стохастических минимаксных задач. С другой стороны, развиваются новые подходы для решения стохастических задач с общими ограничениями, задач со сложными функциями регрессии, предельных экстремальных задач. Результаты этой главы основаны на специальной технике доказательства сходимости, отличной от техники гл. III, которая опиралась на понятие случайной квазифейеровской последовательности. При этом следует отметить, что многие теоремы ради простоты не носят самый общий характер, в частности, нигде не применяются нормирующие множители.

§ 1. О сходимости процедур поиска решений

1. Техника доказательства сходимости, которая была развита в гл. III, существенно опиралась на свойства выпуклости или гладкости функции цели и ограничений. В этом случае можно указать некоторые величины, которые ведут себя монотонно при определенном шаговом множителе. Например, если функция выпуклая, то такой величиной (рис. 4, стр. 45) является расстояние до экстремума $\|x^* - x^s\|$; если же функция гладкая, но не обязательно выпуклая, то такой величиной является значение самой функции (рис. 2, стр. 41). В связи с этим полезным оказалось понятие случайной квазифейеровской последовательности, удовлетворяющей своеобразным требованиям монотонного изменения на каждой итерации расстояния до экстремума.

В том же случае, когда требуется минимизировать невыпуклую и негладкую функцию (рис. 9), движение из x^s по аналогам градиента не дает, вообще говоря, монотонного изменения ни расстояния, ни самой функции, если аналог градиента не выбрать некоторым специальным образом, что обычно практически невозможно сделать. В связи с этим возникает интересный вопрос исследования сходимости методов, аналогичных методу обобщенных градиентов для невыпуклых и негладких функций. Поскольку в этом случае нельзя воспользоваться определенными свойствами монотонности, то нужен новый подход к доказательству сходимости, который и излагается ниже.

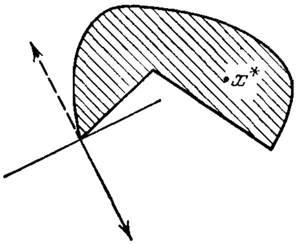

Рис. 9.

2. Пусть имеется некоторая задача и замкнутое множество X^* решений этой задачи, которое понимается достаточно широко: им может быть некоторое подмножество точек экстремума функции $F(x)$ (локального или глобального), множество решений системы уравнений и т. п. Для поиска решения в общем случае строится некоторая последовательность точек x^0, x^1, ..., x^s, ..., которая может быть конечной или бесконечной, детерминированной или случайной, зависящей от элемента ω вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Заметим, что детерминированные последовательности являются частным случаем случайных (распределение $\mathsf{P}(d\omega)$ сосредоточено в одной точке), поэтому привлечение случайных последовательностей позволяет решать задачи, которые невозможно было бы решить детерминированными методами. В дальнейшем рассматриваются только случайные последовательности, но поскольку все рассуждения будут приводиться почти при каждом ω, то зависимость от ω часто опускается.

3. Если имеется случайная последовательность точек

$$x^0(\omega),\ x^1(\omega),\ \ldots,\ x^s(\omega),\ \ldots, \tag{5.1}$$

то возникает основной вопрос о сходимости $x^s(\omega)$ в каком-либо смысле к точкам X^*. В прикладном отношении наиболее важной является сходимость почти при каждом ω.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) $x^s(\omega) \in K(\omega)$, *где* $K(\omega)$ — *замкнутое ограниченное множество*;

2) *для любой сходящейся подпоследовательности* $x^{s_k}(\omega)$ *выполнены условия*:

а) *если* $\lim\limits_{k\to\infty} x^{s_k} = x' \in X^*$, *то*

$$\|x^{s_k+1} - x^{s_k}\| \to 0, \quad k \to \infty; \tag{5.2}$$

б) *если* $\lim\limits_{k\to\infty} x^{s_k} = x' \overline{\in} X^*$, *то существует* $\varepsilon_0(\omega)$, *для которого при всех* $\varepsilon(\omega)$, $0 < \varepsilon(\omega) \leq \varepsilon_0(\omega)$, *величина* $\tau_k(\omega) < \infty$, *где*

$$\tau_k = \min_{s > s_k} \{s\colon \|x^s - x^{s_k}\| > \varepsilon(\omega)\}; \tag{5.3}$$

3) *существует непрерывная функция* $W(x)$, *принимающая на* X^* *не более чем счетное число значений, для которой при* $k \to \infty$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, W(x^{\tau_k}(\omega)) < \lim_{k\to\infty} W(x^{s_k}(\omega)). \tag{5.4}$$

Тогда $W(x^s(\omega))$ *имеет предел и предельные точки последовательности* $x^s(\omega)$ *принадлежат* X^* *почти при каждом* ω.

Эта теорема предназначена для доказательства сходимости конкретных алгоритмов от противного. Интуитивно достаточность условий теоремы можно себе представить следующим образом: ввиду (5.3) исключается случай $\lim x^s = x' \overline{\in} X^*$, ибо из (5.3) следует, что существует подпоследовательность x^{l_k}, для которой $\lim x^{l_k} = x''$, $\|x'' - x'\| \geq \varepsilon > 0$; условие же (5.4) запрещает циклы, так как выход из окрестности произвольной предельной точки $x' \overline{\in} X^*$ должен происходить в сторону строго меньших значений функции $W(x)$.

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Обозначим через $h_{a,b}$ число пересечений снизу вверх произвольного интервала $[a, b]$ последовательностью

$W(x^s)$. Пусть условия теоремы выполнены только для таких $\{x^{s_k}\}$, что $W(x^{s_k}) \leqslant a$.

Лемма 1. *Если* $a \overline{\in} \{W(x)\colon\ x \in X^*\}$, *то* $h_{a,b} < \infty$.

Доказательство. Пусть $h_{a,b} = \infty$. Тогда можно выбрать последовательность индексов (s_k, r_k), для которой

$$W(x^{s_k}) \leqslant a, \quad W(x^{r_k}) \geqslant b, \quad a < W(x^s), \quad s_k < s < r_k.$$

Разрежая, если надо, последовательность пар (s_k, r_k), всегда можно добиться того, чтобы последовательность x^{s_k} сходилась. Пусть $x^{s_k} \to \bar{x}$. Покажем, что $\bar{x} \overline{\in} X^*$. Действительно, если бы $\bar{x} \in X^*$, то с учетом (5.2) было бы справедливо соотношение $0 \geqslant W(x^{s_k}) - a \geqslant W(x^{s_k}) - W(x^{s_k+1}) \to 0$, т. е. $W(\bar{x}) = a$, что противоречит выбору a. Таким образом, $\bar{x} \in X^*$.

Пусть $\tau_k = \min\limits_{s > s_k} \{s\colon \|x^s - x^{s_k}\| > \varepsilon\}$. Ввиду равномерной непрерывности $W(x)$ на $K(\omega)$ и сходимости x^{s_k}, при достаточно малом ε можно для всех достаточно больших k получить $s_k < \tau_k \leqslant r_k$, т. е. $W(x^{s_k}) \leqslant a < W(x^{\tau_k})$ и при $k \to \infty$

$$\overline{\lim}\, W(x^{\tau_k}) \geqslant \lim W(x^{s_k}),$$

что противоречит (5.4). Лемма доказана.

Из леммы следует, что последовательность $W(x^s(\omega))$ сходится почти для каждого ω.

Действительно, если это не так, то найдется некоторый интервал $[a, b]$, для которого $h_{a,b} = \infty$. Так как $W(x)$ на X^* принимает не более чем счетное число значений, то можно считать, что $a \overline{\in} \{W(x)\colon x \in X^*\}$, т. е. получаем противоречие лемме, в силу которой $h_{a,b} < \infty$.

Оставшуюся часть теоремы докажем также от противного.

Пусть существует подпоследовательность x^{s_k} такая, что $x^{s_k} \to x' \overline{\in} X^*$. Так как K — замкнутое ограниченное множество, то в силу (5.4) существует подпоследовательность x^{r_k} последовательности x^{τ_k}, для которой $x^{r_k} \to x''$, $W(x'') < W(x')$, что противоречит сходимости $\{W(x^s)\}$.

Замечание. При доказательстве теоремы нигде не были использованы основные свойства нормированного пространства, поэтому аналогичное утверждение справедливо для метрических и топологических пространств.

Условия доказанной теоремы напоминают необходимые и достаточные условия сходимости, предложенные Зангвиллом [34]. Условия Зангвилла отличаются от условий теоремы, грубо говоря, тем, что вместо (5.3) требуется для любого s существование такого m_s, для которого $W(x^k) \leqslant \leqslant W(x^s)$ при $k \geqslant s + m_s$. Это требование, в отличие от (5.3), носит глобальный характер, и его практически невозможно проверить для немонотонных последовательностей $W(x^s)$.

Теорема 1 дает возможность избавиться от указанного недостатка с помощью более удобного для проверки набора требований, выполнение которых влечет за собой сходимость метода. Прежде чем рассматривать различные применения этой теоремы, докажем одно утверждение, которое потребуется в дальнейшем.

Рассмотрим последовательность $x^s(\omega)$, которая построена следующим образом:

$$x^{s+1} = \begin{cases} x^s + T_s(x^0, \ldots, x^s, \omega), & x^s \in A, \\ z^{s+1} \in B, & x^s \overline{\in} A, \end{cases}$$

где A — замкнутое ограниченное множество, B — замкнутое множество, $T_s(\cdot)$ — некоторая последовательность вектор-функций. Алгоритмы такого рода отражают те часто встречающиеся на практике ситуации, когда в процессе вычислений приходится менять либо начальное приближение, либо параметры алгоритма, либо сам алгоритм.

Лемма 2. *Пусть для x^s выполнены условия теоремы* 1, *причем условия* 2), 3) *выполнены только для точек, являющихся внутренними точками множества $A \supset B$; пусть*

$$\max_{x \in B} W(x) < \inf_{x \overline{\in} A} W(x).$$

Тогда последовательность x^s лишь конечное число раз выходит из A.

Действительно, в противном случае $h_{a,b} = \infty$, где

$$\max_{x \in B} W(x) < a < b < \inf_{x \overline{\in} A} W(x).$$

Так как $a < \inf_{x \in A} W(x)$, кроме того функция $W(x)$ непрерывна, то любая точка $x \in \{x\colon W(x) \leqslant a\}$ является внутренней для множества A. Поэтому в силу леммы 1 $h_{a,b} < \infty$, что противоречит предположению $h_{a,b} = \infty$.

4. Рассмотрим задачу минимизации $F(x)$ во всем пространстве в предположении, что $F(x)$ имеет непрерывные частные производные. Множество X^* определим как $X^* = \{x\colon F_x(x) = 0\}$. Рассмотрим последовательность $x^s(\omega)$, определенную соотношением

$$x^{s+1} = \begin{cases} x^s - \rho_s \xi^s, & \|x^s(\omega)\| \leqslant a, \\ z^{s+1} \in B, & \|x^s(\omega)\| > a, \end{cases} \tag{5.5}$$

где a — некоторая константа, ξ^s — стохастический квазиградиент, для которого

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0, \ldots, x^s) = F_x(x^s) + b^s,$$

где вектор b^s и множители ρ_s измеримы относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной $(x^0, \ldots, x^s)$,

$$B \subset A = \{x\colon \|x\| \leqslant a\}.$$

Теорема 2. *Пусть существует постоянная C такая, что*

$$\|\xi^s\| + \|F_x(x^s)\| + \|b^s\| \leqslant C, \quad \max_{x \in B} F(x) < \inf_{\|x\| > a} F(x).$$

Кроме того, пусть

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \|b^s\| < \infty \ \text{п. н.}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}\rho_s^2 < \infty.$$

Тогда последовательность $F(x^s)$ сходится п. н. и любая предельная точка последовательности $x^s(\omega)$ принадлежит X^* почти при каждом ω.

Заметим, что в этой теореме, в отличие от теоремы 5 гл. III, не требуется глобального условия Липшица. Имеющиеся в этой теореме условия равномерной по s ограниченности легко ослабить, рассматривая нормирующий множитель γ_s подобно тому, как это было сделано в гл. III. Но и в данном виде предположение об ограниченности не является столь существенным в практическом отношении, как это могло бы показаться, — обычно это требование выполнено, если точки x^s изменяются в ограниченной области, а случайные помехи имеют усеченные законы распределения, т. е. принадлежат также ограниченной области.

Доказательство. Применим теорему 1. Требуется доказать только условия (5.3), (5.4). Положим $W(x) = F(x)$ и проверим (5.3).

Пусть $x^{s_k} \to x' \in X^*$, причем пока предположим, что $\|x'\| < a$. Если (5.3) не выполняется, то при $s > s_k$ имеем $\|x^s - x^{s_k}\| \leqslant \varepsilon$ и

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) = (F_x(x^{s_k}), x^s - x^{s_k}) + o(\varepsilon).$$

Так как $\|x^s - x'\| \leqslant \|x^s - x^{s_k}\| + \|x^{s_k} - x'\| \leqslant 2\varepsilon$, $x^{s_k} \to x'$, $\|x'\| < a$, то ε можно выбрать так, чтобы $x^s \in A$ для всех $s > s_k$ и, следовательно, $x^s - x^{s_k} = -\sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l \xi^l$. Тогда

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) = -\left(F_x(x^{s_k}), \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l F_x(x^l)\right) + \Big(F_x(x^{s_k}),$$
$$\sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l \left(F_x(x^l) + b^l - \xi^l\right)\Big) - \left(F_x(x^{s_k}), \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l b^l\right) + o(\varepsilon).$$

Так как $x' \in X^*$, то $\|F_x(x')\| > \delta > 0$ и в силу непрерывности $F_x(x)$ также $(F_x(x), F_x(y)) > \delta$ при x, y, достаточно близких к x'. Так как $\|x^{s_k} - x'\| \leqslant \varepsilon$ при больших k, $\|x^s - x'\| \leqslant 2\varepsilon$, то для некоторой постоянной C

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) \leqslant -\delta \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l + C \left\| \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l (\xi^l - F_x(x^l) - b^l) \right\| + C \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l \|b^l\| + o(\varepsilon). \quad (5.6)$$

По условию теоремы $\mathbf{M}(\rho_l(\xi^l - F_x(x^l) - b^l))^2 \leqslant C\mathbf{M}\rho_l^2$, поэтому согласно теореме 1 гл. 1 ряд $\sum_{l=s_k}^{\infty} \rho_l (\xi^l - F_x(x^l) - b^l)$

сходится. Ряд $\sum \rho_l \| b^l \|$ сходится по условию теоремы, поэтому, переходя к пределу при $s \to \infty$ в последнем неравенстве, получим противоречие с ограниченностью $F(x^s)$. Следовательно, (5.3) доказано. Докажем (5.4). Пусть

$$\tau_k = \min_{s > s_k} \left\{ s\colon \ \| x^s - x^{s_k} \| > \varepsilon \right\}.$$

При достаточно больших k в силу того, что $\rho_s \to 0$, $\| \xi^s \| \leqslant C$, можно сделать

$$\| x^{\tau_k} - x^{s_k} \| \leqslant \| x^{\tau_k} - x^{\tau_k - 1} \| + \| x^{\tau_k - 1} - x^{s_k} \| \leqslant 2\varepsilon.$$

Тогда неравенство (5.6) остается в силе при $s = \tau_k$, т. е.

$$F(x^{\tau_k}) - F(x^{s_k}) \leqslant -\delta \sum_{l = s_k}^{\tau_k - 1} \rho_l + \varepsilon_k + o(\varepsilon),$$

где $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$. Заметим, что

$$\varepsilon < \| x^{\tau_k} - x^{s_k} \| \leqslant \sum_{l = s_k}^{\tau_k - 1} \rho_l \| \xi^l \| \leqslant C \sum_{l = s_k}^{\tau_k - 1} \rho_l.$$

Следовательно, при $k \to \infty$

$$\overline{\lim}\, F(x^{\tau_k}) \leqslant \lim F(x^{s_k}) - \frac{\delta\varepsilon}{C},$$

что и доказывает (5.4). Напомним, что пока предполагалось, что $\| x' \| < a$. Но из леммы 2 следует, что x^s только конечное число раз выходит из $A = \{x\colon \ \|x\| \leqslant a\}$, поэтому при $\|x'\| = a$ доказательство аналогично, с тем только изменением, что вместо окрестностей вида $U_\varepsilon(x) = \{y\colon \ \|y - x\| \leqslant \varepsilon\}$ следует рассматривать окрестности вида $U_\varepsilon(x) \cap \{y\colon \ \|y\| \leqslant a\}$. Теорема доказана.

§ 2. Негладкие и невыпуклые функции

В главе IV было показано, что многие важные задачи стохастического программирования, например стохастические минимаксные задачи, двухэтапные задачи стохастического программирования, связаны с минимизацией выпуклых, но негладких функций Вместе с тем во многих прикладных задачах указанного вида требование выпуклости является обременительным. Типичным в этом отношении является класс задач минимаксного типа, рассмотренный Данскиным [11] в связи с вопросами планирования развития вооружения. Может ли быть предложен для решения таких задач метод, аналогичный обобщенному градиентному методу? На первый взгляд ответ отрицательный, так как рис. 9 показывает, что ни при каком выборе шага ρ_s из точки x^s в направлении квазиградиента (аналога градиента) монотонно не изменяется ни расстояние до решения x^*, ни значение функции цели. Тем не менее в работе [49] рассмотрен класс негладких невыпуклых функций, названных слабо выпуклыми, для минимизации которых можно предложить методы, аналогичные методам обобщенных градиентов и стохастических квазиградиентов.

1. Слабо выпуклые функции. Функция $F(x)$ называется *слабо выпуклой* вниз*), если для любого x существует непустое множество $G(x)$ векторов $\hat{F}_x(x)$ таких, что для всех z и $\hat{F}_x(x) \in G(x)$

$$F(z) - F(x) \geqslant (\hat{F}_x(x), z - x) + r(z, x), \tag{5.7}$$

где $r(x, y)\|x - y\|^{-1} \to 0$ при $y \to x$ равномерно по x, принадлежащему произвольному замкнутому ограниченному множеству. Вектор $\hat{F}_x$, удовлетворяющий неравенству (5.7), будем называть *квазиградиентом слабо выпуклой функции*. Слабо выпуклыми функциями, очевидно, являются дифференцируемые функции, просто выпуклые функции (не обязательно дифференцируемые). Особый интерес представляют следующие утверждения:

Теорема 3. *Если $f(x, y)$ — слабо выпуклые при каждом y функции, т. е.*

$$f(z, y) - f(x, y) \geqslant (\hat{f}_x(x, y), z - x) + r^y(z, x),$$

причем $r^y(z, x)\|z - x\|^{-1} \to 0$ равномерно по $y \in Y$ при $\|z - x\| \to 0$, z, $x \in X$ — произвольному замкнутому ограниченному множеству, то

$$F(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x))$$

— слабо выпуклая функция, а

$$\hat{F}_x(x) = \hat{f}_x(x, y)|_{y = y(x)} = \hat{f}_x(x, y(x)).$$

*) По всей видимости, естественнее такие функции называть полудифференцируемыми снизу.

Действительно,

$$F(z)-F(x)=f(z,\ y(z))-f(x,\ y(x))\geqslant$$
$$\geqslant f(z,\ y(x))-f(x,\ y(x))\geqslant$$
$$\geqslant\left(\hat{f}_x(x,\ y(x)),\ z-x\right)+r^{y(x)}(z,\ x)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\hat{f}_x(x,\ y(x)),\ z-x\right)+r(z,\ x),$$

где $r(z,\ x)=\inf r^y(z,\ x)$. Так как $r^y(z,\ x)\|z-x\|^{-1}\to 0$ равномерно по y, то $r(z,\ x)\|z-x\|^{-1}\to 0$ при $\|z-x\|\to 0$, где z, x принадлежат замкнутому ограниченному множеству.

Доказательство теоремы показывает, что если $f(x,\ y)$ дифференцируема по x, y, то

$$\hat{F}_x(x)=f_x(x,\ y)\,|_{y=y(x)}=f_x(x,\ y(x))\tag{5.8}$$

является квазиградиентом $F(x)$. Имеют место следующие утверждения, доказательство которых есть в [49]:

Теорема 4. *При каждом x $G(x)$ — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество; $G(x)$ — полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение, т. е. из того, что $x^s\to x$, $z^s\to z$, $z^s\in G(x^s)$, следует, что $z\in G(x)$. Слабо выпуклая функция $F(x)$ дифференцируема по направлению, причем*

$$\frac{\partial F}{\partial e}=\lim_{\rho\to+0}\frac{F(x+\rho e)-F(x)}{\rho}=\max_{g\in G(x)}(g,\ e).$$

2. Стохастический квазиградиентный метод. Рассмотрим задачу минимизации слабо выпуклой функции $F(x)$. Как показывает формула для производной по направлению функции $F(x)$, множество X^* естественно определить как $X^*=\{x\colon\ 0\in G(x)\}$. Рассмотрим

$$x^{s+1}=\begin{cases} x^s-\rho_s\xi^s, & \|x^s\|\leqslant a,\\ z^{s+1}\in B, & \|x^s\|>a,\end{cases}\tag{5.9}$$

где x^0 — произвольное начальное приближение, $B\subset A=\{x:\ \|x\|\leqslant a\}$, ξ^s — стохастический квазиградиент, для которого

$$\mathsf{M}(\xi^s/x^0,\ \ldots,\ x^s)=\hat{F}_x(x^s)+b^s;\tag{5.10}$$

ρ_s — неотрицательное число и b^s — вектор, зависящие от $(x^0,\ \ldots,\ x^s)$ (измеримые относительно σ-алгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной ($x^0, \ldots, x^s$)). Как и в теореме 2, пусть

$$\max_{x \in B} F(x) < \inf_{\|x\| > a} F(x). \tag{5.11}$$

Теорема 5. *Предположим, что существует постоянная C такая, что*

$$\|\xi^s\| + \|\hat{F}_x(x^s)\| + \|b^s\| \leqslant C,$$

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \frac{\rho_{s+1}}{\rho_s} \to 1, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \|b^s\| < \infty \text{ п. н.}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} M\rho_s^2 < \infty.$$

Тогда почти для всех ω предельные точки последовательности $x^s(\omega)$ принадлежат X^*, $\{F(x^s)\}$ сходится.

Доказательство. Положим $W(x) = F(x)$. Условие (5.2) выполнено, потому что $\|\xi^s\| \leqslant C$ и $\rho_s \to 0$.

Пусть x^{s_k} — некоторая подпоследовательность, сходящаяся к точке $x' \,\overline{\in}\, X^*$. Пока предположим, что $\|x'\| < a$. Если условие (5.3) не выполнено, то для достаточно больших $s > s_k$ точка $x^s \in U_\varepsilon(x^{s_k}) = \{x : \|x - x^{s_k}\| \leqslant \varepsilon\}$. Кроме того, можно считать, что $\|x^{s_k} - x'\| \leqslant \varepsilon$. Оценим $F(x^s) - F(x^{s_k})$ при $s > s_k$. При любых $t, q, t > q, x^t = x^q - \sum_{l=q}^{t-1} \rho \xi^l$ имеем

$$F(x^t) - F(x^q) \leqslant (\hat{F}_x(x^t),\ x^t - x^q) - r(x^q,\ x^t) =$$
$$= -(F_x(x^t),\ \sum_{l=q}^{t-1} \rho_l [\hat{F}_x(x^l) + b^l]) +$$
$$+ (\hat{F}_x(x^t),\ \sum_{l=q}^{t-1} \rho_l [\hat{F}_x(x^l) + b^l - \xi^l]) - r(x^q,\ x^t) \leqslant$$
$$\leqslant -(\hat{F}_x(x^t),\ \sum_{l=q}^{t-1} \rho_l \hat{F}_x(x^l)) + \sum_{l=q}^{t-1} \rho_l \|b^l\| +$$
$$+ (\hat{F}_x(x^t),\ \sum_{l=q}^{t-1} \rho_l [\hat{F}_x(x^l) + b^l - \xi^l]) - r(x^q,\ x^t). \tag{5.12}$$

Все слагаемые правой части, за исключением первого, легко оцениваются. Первое же слагаемое оценивается на основе следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть Y — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, не содержащее нуля, $y^t \in Y$, $t = 0, 1, \ldots$;*

$$z^{t+1} = (1 - \delta_t) z^t + \delta_t y^{t+1}, \tag{5.13}$$

где $z^0 = y^0$, $0 \leqslant \delta_t \leqslant 1$, $\delta_t \to 0$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta_t = \infty$.

Тогда существуют $N < \infty$ и $\gamma > 0$ такие, что для произвольной последовательности y^t хотя бы для одного $m \leqslant N$

$$(y^{m+1}, z^m) > \gamma.$$

Доказательство. Имеем

$$\| z^{t+1} \|^2 = \| z^t \|^2 + 2\delta_t [(y^{t+1}, z^t) - \| z^t \|^2] + \delta_t^2 \| y^{t+1} - z^t \|^2.$$

Так как Y не содержит нуля, то для любой последовательности y^t

$$0 < C_1 \leqslant \| y^t \| \leqslant C_2 < \infty$$

для некоторых чисел C_1, C_2. Положим $\gamma = \frac{1}{2} C_1^2$ и предположим, что $(y^{t+1}, z^t) \leqslant \gamma$ для всех t. Тогда получим, что при больших t

$$\| z^{t+1} \|^2 \leqslant \| z^t \|^2 + 2\delta_t \left(\frac{1}{2} C_1^2 - C_1^2 \right) + 2\delta_t^2 C_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| z^t \|^2 - \delta_t (C_1^2 + 2\delta_t C_2^2) \leqslant \| z^t \|^2 - \delta_t \gamma = \| z^0 \|^2 - \gamma \sum_{k=0}^{t} \delta_k.$$

В силу расходимости ряда $\sum \delta_t$ это неравенство противоречит неотрицательности $\| z^t \|$. Лемма доказана.

Следствие. *Лемма остается справедливой и в том случае, когда Y не обязательно выпукло и лишь выпуклая оболочка Y замкнута, ограничена и не содержит нуля.*

Продолжим доказательство теоремы 5. Из леммы следует, что существуют N, $\gamma > 0$, m_k, $0 \leqslant m_k - s_k < N$, для которых

$$\left(\hat{F}_x (x^{m_k}), \sum_{l=s_k}^{m_k - 1} \rho_l \hat{F}_x (x^l) \right) > \gamma \sum_{l=s_k}^{m_k - 1} \rho_l. \tag{5.14}$$

Действительно, обозначив

$$\sum_{l=s_k}^{s_k+t} \rho_l \hat{F}_x(x^l) \Big/ \sum_{l=s_k}^{s_k+t} \rho_l = z^t,$$

получим, что z^t определяется формулой вида (5.13) при

$$\delta_t = \rho_{s_k+t+1} \Big/ \sum_{l=s_k}^{s_k+t+1} \rho_l, \quad y^t = \hat{F}_x(x^{s_k+t}), \quad t=0,\ 1,\ \ldots$$

Имеем $0 \leqslant \delta_t \leqslant 1$, $\delta_t \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того, $\prod_{t=0}^{\infty}(1-\delta_t)=0$ в силу того, что $\sum \rho_t = \infty$. Отсюда получаем, что и $\sum \delta_t = \infty$. В силу полунепрерывности сверху множественного отображения $G(x)$ существует $\alpha > 0$, для которого

$$0 \overline{\in} \operatorname{co}\{x:\ x \in \bigcup G(x),\ \|x-x'\| \leqslant \alpha\} = \operatorname{co}\{G_\alpha(x')\},$$

где co $\{\cdot\}$ обозначает выпуклую оболочку $\{\cdot\}$. Из теоремы 4 легко следует, что $\operatorname{co}\{G_\alpha(x')\}$ замкнута и ограничена. Так как $\|x^s - x^{s_k}\| \leqslant \varepsilon$, $\|x^{s_k} - x'\| \leqslant \varepsilon$, то $\|x^s - x'\| \leqslant 2\varepsilon$, поэтому при данном $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\alpha > 0$, что при $s \geqslant s_k$ вектор $\hat{F}_x(x^s) \in G_\alpha(x')$, т. е. $G_\alpha(x')$ удовлетворяет всем предпосылкам следствия леммы 3. Следовательно, (5.14) имеет место. Далее, если вместо s_k в (5.14) взять m_k, то найдется m_{k+1}, для которого

$$\left(\hat{F}_x(x^{m_{k+1}}),\ \sum_{l=m_k}^{m_{k+1}-1} \rho_l \hat{F}_x(x^l)\right) > \gamma \sum_{l=m_k}^{m_{k+1}-1} \rho_l,$$

и т. д. Таким образом, найдется последовательность моментов m_r, $r=k,\ k+1,\ \ldots$, для которых

$$\left(\hat{F}_x(x^{m_r}),\ \sum_{l=s_k}^{m_r-1} \rho_l \hat{F}_x(x^l)\right) > \gamma \sum_{l=s_k}^{m_r-1} \rho_l.$$

Так как $\rho_{s+1}/\rho_s \to 1$, то при достаточно больших k значение $\delta_t \sim 1/(t+1)$, и поэтому при больших k можно выбрать N так, чтобы $m_k - s_k \leqslant N$, $m_{r+1} - m_r \leqslant N$, $r=k$, $k+1, \ldots$. Следовательно, при $m_r \leqslant s < m_{r+1}$, подобно

(5.12), получаем

$$F(x^s)-F(x^{s_k})=F(x^{m_r})-F(x^{m_{r-1}})+F(x^{m_{r-1}})-F(x^{m_{r-2}})+\\
+\ldots+F(x^{m_k})-F(x^{s_k})-F(x^s)-F(x^{m_r})\leqslant-\gamma\sum_{l=s_k}^{m_r-1}\rho_l+\\
+\sum_{l=s_k}^{m_r-1}\rho_l\|b^l\|+\left(\hat F_x(x^{m_r}),\ \sum_{l=s_k}^{m_r-1}\rho_l[\hat F_x(x^l)+b^l-\xi^l]\right)+\\
+r(x^{m_{r-1}},\ x^{m_r})+\ldots+r(x^{s_k},\ x^{m_k})+F(x^s)-F(x^{m_r}).$$

По условию теоремы $\sum\rho_l\|b^l\|<\infty$; поэтому при достаточно большом s_k значение $\sum\limits_{l=s_k}^{\infty}\rho_l\|b^l\|\leqslant\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Из условий теоремы (с учетом теоремы 1 гл. I) также следует, что $\sum\rho_l(\hat F_x(x^l)+b^l-\xi^l)<\infty$, поэтому и $\left(\hat F_x(x^{m_r}),\ \sum\limits_{l=s_k}^{\infty}\rho_l[\hat F_x(x^l)+b^l-\xi^l]\right)\leqslant\varepsilon_k$. Значение $r(x^{m_{r-1}},x^{m_r})+\ldots+r(x^{s_k},x^{m_k})=o\left(\sum\limits_{l=s_k}^{m_r-1}\rho_l\right)$ в силу того, что $\|x^{m_r}-x^{s_k}\|\leqslant\varepsilon$. Значение $F(x^s)-F(x^{m_r})\to 0$ при $k\to\infty$, так как $\|x^s-x^{m_r}\|\to 0$, . е. при $k\to\infty$ значение $F(x^s)-$ $-F(x^{m_r})$ можно считать также меньше ε_k. Поэтому получаем

$$F(x^s)-F(x^{s_k})\leqslant-\frac{\gamma}{2}\sum_{l=s_k}^{s}\rho_l+O(\varepsilon_k).\tag{5.15}$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $s\to\infty$, получим противоречие с ограниченностью непрерывной функции $F(x)$ в области A. Это показывает, что условие (5.3) выполнено.

Положим $\tau_k=\min\limits_{s>s_k}\{s:\ \|x^s-x^{s_k}\|>\varepsilon\}$.

По определению $x^{\tau_k}\bar\in U_\varepsilon(x^{s_k})$, но при достаточно больших k в силу того, что $\rho_s\to 0$, $\|\xi^s\|\leqslant C$, $\|x^{\tau_k}-x^{s_k}\|\leqslant$ $\leqslant\|x^{\tau_k}-x^{\tau_{k-1}}\|+\|x^{\tau_k-1}-x^{s_k}\|\leqslant 2\varepsilon$ (так как $x^{\tau_k-1}\in$

$\in U_\varepsilon(x^{s_k})$). Неравенство (5.15) будет иметь место и при $s=\tau_k$. С другой стороны,

$$\varepsilon < \| x^{\tau_k} - x^{s_k} \| \leq \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \| x^{l+1} - x^l \| \leq C \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \rho_l.$$

Следовательно,

$$F(x^{\tau_k}) - F(x^{s_k}) \leq -\frac{\gamma\varepsilon}{C} + O(\varepsilon_k).$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получим

$$\overline{\lim} F(x^{\tau_k}) < \lim F(x^{s_k}),$$

что доказывает и условие (5.4).

Пока предполагалось, что $\|x'\| < a$. В силу леммы 2, как и в предыдущей теореме, доказательство при $\|x'\| = a$ существенно не изменяется. Теорема 5 доказана.

3. Применение в стохастическом программировании. Метод (5.9) позволяет минимизировать слабо выпуклую функцию регрессии $F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta)$ без предположения о ее выпуклости или гладкости, чего требовали методы гл. III. Это значит, что можно решать более общий класс стохастических минимаксных задач, двухэтапных задач, задач управления случайным процессом по сравнению с теми, которые рассматривались в гл. IV. Например, пусть $f(x, \theta) = \max_{y \in Y} f(x, y, \theta)$, т. е. рассмотрим задачу минимизации

$$F(x) = \mathsf{M} \max_{y \in Y} f(x, y, \theta).$$

Из теоремы 3 и ее доказательства легко получить различные условия слабой выпуклости данной функции $F(x)$. Так, если $Y = \{1, \ldots, m\}$ и при каждом θ функции $f(x, y, \theta)$ гладкие по x, то $f(x, \theta)$ — слабо выпуклая функция и вектор

$$\xi^s = f_x(x^s, y_s, \theta), \quad f(x^s, y_s, \theta) = \max_y f(x^s, y_s, \theta)$$

является квазиградиентом этой функции при данном θ и $x = x^s$. Если при этом градиенты $f_x(x, y, \theta)$ удовлетворяют локальному условию Липшица, т. е.

$$\| f_x(z, y, \theta) - f_x(x, y, \theta) \| \leq C_L(\theta) \| z - x \|$$

при $\|z - x\| \leq L$, где $C_L(\theta)$ интегрируема по θ, то легко показать, что и функция $F(x)$ будет слабо выпуклой с остаточным членом $|r(z, x)| \leqslant MC_L \|z-x\|^2$. Таким образом, в этом случае процедура (5.9) сводится к следующей:

$$x^{s+1} = \begin{cases} x^s - \rho_s f_x(x^s, y_s, \theta^s), & \|x^s\| \leqslant a, \\ z^{s+1} \in B, & \|x^s\| > a, \end{cases}$$

где θ^s, $s = 0, 1, \ldots,$ — независимые наблюдения состояния θ.

§ 3. Предельные экстремальные задачи

1. Методика, развитая в § 1, позволяет также изучать интересные и важные вопросы, связанные с решением предельных экстремальных задач.

В приложениях часто приходится иметь дело с экстремальными задачами, функция цели $F(x)$ которых не бывает строго фиксированной, как это рассматривалось до сих пор, а изменяется в зависимости от некоторого параметра (в частности, времени), т. е. вместо $F(x)$ имеется последовательность функций $F^N(x)$, приближающих в некотором смысле $F(x)$. Осуществить операцию предельного перехода, найти $F(x)$, а затем найти ее экстремум, как правило, невозможно по ряду обстоятельств, из которых можно отметить следующие:

1) Параметр N отвечает дискретному времени, и $F^N(x)$ становится известной только в момент N. В этом случае переход к пределу займет все время, отведенное для решения задачи.

2) Параметр N — индекс членов последовательности, его можно изменять по своему усмотрению, в частности «замораживать» на определенных интервалах процесса оптимизации, однако операцию предельного перехода технически осуществить сложно. Такие случаи характерны для задач оптимизации стационарных режимов управляемых процессов, когда рассматриваются усредненные показатели качества вида

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} F^N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} Q(l, x),$$

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} F^N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N} \alpha^l Q(l, x).$$

Подобная ситуация возникает и тогда, когда функция цели имеет вид $F(x)=Q(x, \min f(y))$, т. е. зависит от решения другой экстремальной задачи. Найти $\min f(y)$ за конечное число итераций невозможно, поэтому строится последовательность y^N, для которой $f^N=f(y^N)\to\min f(y)$, так что имеется последовательность $F^N(x)=Q(x, f^N)$. Можно, конечно, вначале найти $\lim\limits_{N\to\infty} f^N=\min f(y)$, подставить это в $Q(x, \min f(y))$ и затем найти $\min F(x)$. Однако выгоднее минимизировать $F(x)$ параллельно с минимизацией $f(y)$ на основе функций $F^N(x)$. При этом важно построить такую последовательность x^s, для которой $\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ s\to\infty}} F^N(x^s)=\min F(x)$.

3) В методах штрафных функций экстремальная задача с функцией цели $F(x)$ сводится к минимизации некоторых функций $F(x, C)$ во всем пространстве, причем $\min F(x)=\lim\limits_{C\to\infty}\min F(x, C)$. При каждом конкретном значении C минимизация $F(x, C)$ дает только приближенное решение исходной задачи, поэтому в процессе минимизации $F(x, C)$ целесообразно изменять C, устремляя его к ∞ так, чтобы получить последовательность приближений x^s, сходящуюся при $s\to\infty$ к точному решению исходной экстремальной задачи.

4) Операция предельного перехода портит некоторые хорошие свойства функции $F^N(x)$, что характерно для задач аппроксимации, когда плохая по каким-либо причинам функция приближается последовательностью «хороших» и поэтому вместо $F(x)$ целесообразнее иметь дело с функциями $F^N(x)$. В таких случаях возникает интересная и сложная задача оптимизации предельной функции $F(x)$ с использованием информации о членах последовательности $F^N(x)$, приближающих $F(x)$. При этом важно иметь в виду, что если $F(x)$ неизвестна, то для приближенного решения задачи ограничиться рассмотрением только какой-либо одной функции $F^N(x)$ невозможно, так как нельзя определить точность получаемого приближения.

В этом параграфе обсуждаются такие процедуры поиска экстремума, в которых на основе анализа последовательности функций $F^N(x)$ отыскивается экстремум функции $F(x)$.

2. Чтобы стала понятной основная идея изучения этих вопросов, рассмотрим задачу минимизации выпуклой вниз функции в выпуклой области X, хотя это можно сделать и для задач со слабо выпуклыми функциями.

Пусть требуется минимизировать

$$F(x), \tag{5.16}$$

$$x \in X, \tag{5.17}$$

где X — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $F(x)$ — выпуклая функция, заданная как предел некоторой последовательности $F^N(x)$, т. е. $F(x) = \lim\limits_{N \to \infty} F^N(x)$.

Предположим пока, что обобщенный градиент функций $F^N(x)$ вычисляется точно. Это может быть тогда, когда (5.16) — (5.17) — детерминированная задача или когда стохастическая задача аппроксимируется последовательностью детерминированных.

Рассмотрим

$$x^{s+1} = \pi_X\left(x^s - \rho_s \hat{F}^s_x(x^s)\right), \tag{5.18}$$

где $s = 0, 1, \ldots$; $\rho_s \geqslant 0$ — шаговые множители; $\hat{F}^s_x$ — обобщенный градиент выпуклой функции $F^s(x)$; π_X — оператор проектирования на множество X. Справедлива следующая теорема:

Теорема 6. *Пусть $F^s(x)$ — выпуклые при каждом s функции, последовательность $F^s(x)$ сходится на X равномерно и*

$$\rho_s \to 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty.$$

Тогда для любой сходящейся последовательности x^{s_k}

$$\lim_{k \to \infty} x^{s_k} = x^* \in X^*,$$

где X^* — множество решений задачи (5.16) — (5.17) *и* $F^s(x^s) \to F(x^*)$.

Наиболее существенным в предположениях теоремы является требование равномерной сходимости последовательности $F^N(x)$. Однако в случае выпуклых функций $F^N(x)$ равномерная сходимость легко следует из поточечной при наличии некоторых весьма слабых дополнительных предположений. Остальные условия ничем не отличаются от условий сходимости метода обобщенных градиентов.

Доказательство. Проверим условия теоремы 1. Пусть утверждение теоремы неверно и x^{s_k} — некоторая подпоследовательность, сходящаяся к точке $x' \overline{\in} X^*$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in U_{4\varepsilon}(x') = \{x\colon \|x - x'\| \leqslant 4\varepsilon\}$

$$F(x) - F(x^*) \geqslant \delta > 0, \quad x^* \in X^*.$$

Но тогда

$$F(x) - F^s(x) + F^s(x) - F^s(x^*) + F^s(x^*) - F(x^*) \geqslant \delta$$

и в силу равномерной сходимости

$$F^s(x) - F^s(x^*) \geqslant \frac{\delta}{2} > 0$$

для достаточно больших s. Отсюда немедленно следует, что

$$(\hat{F}_x^s(x),\ x^* - x) \leqslant -\frac{\delta}{2} < 0, \qquad x^* \in X^*.$$

Покажем, что для всех k

$$\tau_k < \infty. \tag{5.19}$$

Прежде всего заметим, что если это не так, то $x^s \in U_\varepsilon(x^{s_k})$ для всех $s > s_k$ и, следовательно, $x' \in U_\varepsilon(x^{s_k})$, откуда следует, что $x^s \in U_{2\varepsilon}(x')$ для $s > s_k$, где k можно считать сколь угодно большим.

Положим $W(x^s) = \min\limits_{x^*} \|x^* - x^s\|^2 = \|x^*(s) - x^s\|^2$, и пусть $s > s_k$. Тогда

$$\begin{aligned} W(x^{s+1}) &\leqslant \|x^*(s) - x^{s+1}\|^2 \leqslant \|x^*(s) - x^s + \rho_s \hat{F}_x^s(x^s)\|^2 = \\ &= W(x^s) + 2\rho_s(\hat{F}_x^s(x^s),\ x^*(s) - x^s) + \rho_s^2 \|\hat{F}_x(x^s)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant W(x^s) - \delta\rho_s + C\rho_s^2 \leqslant W(x^s) - \rho_s(\delta - C\rho_s). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Суммируя по s от s_k до $r-1$, получим при некотором $C > 0$

$$W(x^r) \leqslant W(x^{s_k}) - C\sum_{s=s_k}^{r-1} \rho_s. \tag{5.21}$$

Переходя в (5.21) к пределу по $r \to \infty$, получим противоречие с ограниченностью $W(x)$ на замкнутом ограниченном множестве $U_{2\varepsilon}(x')$, откуда следует, что (5.19) справедливо.

По построению $x^{\tau_k} \overline{\in} U_\varepsilon(x^{s_k})$, но для достаточно больших k

$$x^{\tau_k - 1} \in U_\varepsilon(x^{s_k}) \subset U_{2\varepsilon}(x'),$$

и, следовательно, $x^{\tau_k} \in U_{4\varepsilon}(x')$.

Поэтому все рассуждения, проделанные при выводе неравенства (5.21), остаются справедливыми и при $r = \tau_k$. Но с другой стороны, в силу свойств операции проектирования

$$\varepsilon < \left\| x^{\tau_k} - x^{s_k} \right\| \leqslant \sum_{s=s_k}^{\tau_k - 1} \left\| x^{s+1} - x^s \right\| \leqslant C \sum_{s=s_k}^{\tau_k - 1} \rho_s,$$

что при подстановке в (5.21) дает

$$W(x^{\tau_k}) \leqslant W(x^{s_k}) - \frac{\varepsilon\delta}{2C}.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получим

$$\overline{\lim}\, W(x^{\tau_k}) < \lim W(x^{s_k}). \tag{5.22}$$

Ввиду (5.19) и (5.22) утверждение теоремы следует теперь из общих результатов о сходимости § 1 этой главы.

З а м е ч а н и е. Если вместо обобщенного градиента $\hat{F}_x^s(x^s)$ в методе (5.18) применяется вектор со смещением вида $\hat{F}_x^s(x^s) + b^s$, то дополнительно к условиям теоремы 6 следует потребовать, чтобы $\sum \rho_s \| b^s \| < \infty$.

3. Большой интерес представляет сходимость стохастического аналога алгоритма (5.18):

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \xi^s), \tag{5.23}$$

где ξ^s — случайный вектор, условное математическое ожидание которого

$$\mathsf{M}(\xi^s / x^0, \ldots, x^s) = \hat{F}_x^s(x^s) + b^s,$$

где вектор b^s и шаговые множители ρ_s измеримы относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}_s$, индуцированной $(x^0, \ldots, x^s)$. Необходимость стохастических процедур вида (5.23) возникает в том случае, когда детерминированная или стохастическая задача аппроксимируется последовательностью стохастических задач с функциями регрессии $F^s(x)$.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы* 6, *где* $\rho_s \geqslant 0$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$ *с вероятностью* 1. *Кроме того,*

$$\|\xi^s\| + \|\hat{F}_x(x^s)\| + \|b^s\| \leqslant C,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \|b^s\| < \infty \text{ п. н.}, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} M\rho_s^2 < \infty.$$

Тогда почти для всех ω *предельные точки последовательности* $x^s(\omega)$ *принадлежат множеству решений* X^*,

$$\lim F^s(x^s(\omega)) = F(x^*), \qquad x^* \in X^*.$$

Доказательство этой теоремы, за небольшим изменением, повторяет доказательство предыдущей теоремы, поэтому полностью повторять его не имеет смысла. Изменения касаются только вывода основного неравенства (5.20), если не считать того, что в рассуждениях следует подчеркивать, что они справедливы почти при каждом ω. Поэтому остановимся на выводе аналога (5.20). Имеем

$$\begin{aligned} W(x^{s+1}) &\leqslant \|x^*(s) - x^s + \rho_s\xi^s\|^2 = \\ &= W(x^s) + 2\rho_s(\xi^s,\ x^*(s) - x^s) + \rho_s^2\|\xi^s\|^2 = \\ &= W(x^s) + 2\rho_s(\hat{F}_x^s(x^s),\ x^*(s) - x^s) + 2\rho_s(b^s,\ x^*(s) - x^s) + \\ &\quad + 2\rho_s(\xi^s - \hat{F}_x^s(x^s) - b^s,\ x^*(s) - x^s) + C\rho_s^2 \leqslant \\ &\leqslant W(x^s) - \frac{\delta}{2}\rho_s + C\rho_s\|b^s\| + \\ &\quad + 2\rho_s(\xi^s - \hat{F}_x^s(x^s) - b^s,\ x^*(s) - x^s) + C\rho_s^2, \end{aligned}$$

где C — некоторая константа. Тогда вместо неравенства (5.21) имеем

$$\begin{aligned} W(x^r) \leqslant W(x^{s_k}) &- \frac{\delta}{2}\sum_{s=s_k}^{r-1} \rho_s + C\sum_{s=s_k}^{r-1} (\rho_s\|b^s\| + \rho_s^2) + \\ &+ \sum_{s=s_k}^{r-1} \rho_s(\xi^s - \hat{F}_x^s(x^s) - b^s,\ x^*(s) - x^s). \end{aligned}$$

При $r\to\infty$ ряд $\sum(\rho_s\|b^s\|+\rho_s^2)$ сходится по условиям теоремы, а ряд $\sum\rho_s\left(\xi^s-\hat{F}_x^s(x^s)-b^s,\ x^*(s)-x^s\right)$ сходится в силу теоремы 1 гл. I с учетом условий данной теоремы.

4. Пример. В ряде случаев для улучшения свойств изучаемых функций применяется операция сглаживания. Широкое распространение получила *операция* типа *свертки*, т. е. когда вместо функций $f(x)$ рассматривается функция

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\,dh(y),$$

где $h(y)$ — ядро преобразования, которое часто является функцией распределения. При соответствующем выборе ядра функция $F(x)$ оказывается более гладкой, чем $f(x)$, может иметь более плавный характер (рис. 10). Трудность минимизации $F(x)$ состоит в том, что эта задача по существу является задачей стохастического программирования.

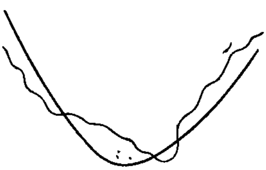

Рис. 10.

Вместо ядра $h(y)$ можно рассматривать последовательность ядер $h^N(y)$ и последовательность преобразований

$$F^N(x)=\int f(x-y)\,dh^N(y),$$

для которых при $N\to\infty$ $F^N(x)\to f(x)$ (в некотором смысле). Тогда обычная задача нелинейного программирования заменяется последовательностью задач стохастического программирования, решать которые следует соответствующими методами. Отметим, что если $f(x)$ — недифференцируемая функция, а $F^N(x)$ — функция, имеющая непрерывные производные, то минимизацию $f(x)$ можно осуществить с помощью разновидности процедуры (5.23):

$$x^{s+1}=x^s-\rho_s\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x^s+\Delta_s e^j-y^s)-f(x^s-y^s)}{\Delta_s}e^j,$$

где y^s — случайный вектор с функцией распределения $h^s(y)$. Заметим также, что если $f(x)$ имеет колебательный характер (рис. 10), то эта процедура благодаря наличию случайных переменных y^s позволяет «проскакивать» многочисленные точки локального минимума.

§ 4. Сложные функции регрессии. Операция усреднения

1. В предыдущих главах рассматривались экстремальные задачи, функция цели и ограничения которых определялись функциями регрессии вида $F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta) = \int z \mathsf{P}(x, dz)$, где значения случайной величины $f(x, \theta)$ при данных x, θ вычислялись точно. Рассмотрим теперь принципы решения задач, в которых точные значения $f(x, \theta)$ неизвестны. Для краткости условимся называть их *задачами стохастического программирования со сложными функциями регрессии*. Простейшим примером такой задачи является минимизация дисперсии величины $f(x, \theta)$, т. е. функции

$$\mathsf{D}(x) = \mathsf{M}(f(x, \theta) - \mathsf{M} f(x, \theta))^2.$$

Более общими являются сложные функции регрессии вида

$$F(x) = \mathsf{M} q(x, \mathsf{M} f(x, \theta), \theta).$$

В данном случае $q(x, \mathsf{M} f(x, \theta), \theta)$ неизвестно в силу того, что неизвестно точное значение $\mathsf{M} f(x, \theta)$.

Переход от функции $F(x) = \mathsf{M} f(x, \theta)$ к функции $F(x) = \mathsf{M} q(x, \mathsf{M} f(x, \theta), \theta)$ осуществлен с помощью замены $f(x, \theta)$ на $q(x, \mathsf{M} f(x, \theta), \theta)$. Если теперь и в $q(x, \mathsf{M} f(x, \theta), \theta)$ произвести аналогичную замену, то получим еще более общую функцию регрессии и т. д.

Как будет показано в дальнейшем, важные классы задач со сложными функциями регрессии возникают при использовании метода штрафных функций в задачах стохастического программирования.

Описанные в предыдущих главах численные методы существенно опирались на точную информацию о значениях $f(x, \theta)$, поэтому непосредственно применить их при решении задач со сложными функциями регрессии нельзя. Тем не менее небольшое видоизменение этих методов, связанное с введением некоторой операции, получившей название *операции усреднения*, позволяет однообразно решать такого рода задачи различных уровней сложности. Прежде чем формально ввести операцию усреднения, наметим общий путь решения на примере двух весьма общих задач.

2. Пусть $q(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n, \theta)$, $f^i(x_1, \ldots, x_n, \theta)$, $i = 1, \ldots, m$, — функции, которые при данных $x =$

$=(x_1, \ldots, x_n)$, $z=(z_1, \ldots, z_m)$ являются случайными величинами и удовлетворяют всем требованиям, достаточным для существования встречающихся ниже интегралов. Положим $f(x, \theta)=(f^1(x, \theta), \ldots, f^m(x, \theta))$, $Q(x, z)=\mathsf{M}q(x, z, \theta)$, $g^i(x)=\mathsf{M}f^i(x, \theta)$, $g(x)=(g^1(x), \ldots, g^m(x))$ и рассмотрим задачу минимизации функции

$$F(x)=\mathsf{M}q(x, g^1(x), \ldots, g^m(x), \theta)=Q(x, g(x)), \tag{5.24}$$

$$x \in X. \tag{5.25}$$

Если существуют необходимые частные производные, то

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial Q(x, g(x))}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q(x, g(x))}{\partial g^i} \frac{\partial g^i(x)}{\partial x_j}.$$

Отсюда следует, что для вычисления градиента $F(x)$ вида (5.24) требуется иметь градиенты функций $g^i(x)=\mathsf{M}f^i(x)$ в точке x и частные производные по x, z функции $Q(x, z)=$ $=\mathsf{M}q(x, z, \theta)$ при $z=\mathsf{M}f(x, \theta)$. Если бы при данном x значение $z=\mathsf{M}f(x, \theta)$ было известно, то для указанных производных можно было бы найти статистические оценки аналогично тому, как это делалось в предыдущей главе, и применить развитые до этого методы. Однако значение $z=\mathsf{M}f(x, \theta)$ неизвестно, и найти статистическую оценку $\frac{\partial Q}{\partial z_i}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_j}$ в неизвестной точке (x, z), $z=\mathsf{M}f(x, \theta)$, невозможно. Поэтому в [23] для минимизации функции (5.24) строится такая последовательность точек (x^s, z^s), что $\|z^s-\mathsf{M}(f(x^s, \theta)/x^s)\| \to 0$ при $s \to \infty$ п. н., за счет чего с z^s можно оперировать примерно так же, как и с неизвестным $\mathsf{M}(f(x^s, \theta)/x^s)$, и добиваться сходимости x^s к решению задачи (5.24)—(5.25). При этом z^s, грубо говоря, равно $\frac{1}{s}\sum_{l=0}^{s} f(x^l, \theta^l)$.

Более точно, так как неизвестным является $z=\mathsf{M}f(x, \theta)$, то естественно рассмотреть последовательность точек (x^s, z^s), $s=0, 1, \ldots$, такую, что

$$x^{s+1}=\pi_X(x^s-\rho_1(s)\xi^s), \tag{5.26}$$

$$z^{s+1}=z^s-\rho_2(s)(z^s-f(x^s, \theta^s)), \tag{5.27}$$

где ξ^s — случайный вектор, для которого

$$\mathsf{M}\,(\xi^s/\,x^0\ \ z^0),\ \ldots,\ (x^s,\ z^s)) = Q_x(x^s,\ z^s) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial Q(x^s,\ z^s)}{\partial g^i} g_x^i(x^s),$$

т. е. условное математическое ожидание ξ^s совпадает с градиентом функции (5.24) в том случае, когда $z^s = g(x^s) = \mathsf{M}\,(f(x^s,\ \theta^s)/x^s)$. Поэтому, если $z^s \to g(x^s)$, то указанная процедура вырождается при достаточно больших s в обычный стохастический квазиградиентный метод. Заметим, что если $\rho_2(s) = 1/(s+1)$, $z^0 = 0$, то

$$z^s = \frac{1}{s} \sum_{l=1}^{s} f(x^l,\ \theta^l);$$

поэтому можно говорить, что z^s получено с помощью операции усреднения.

3. Стохастическая минимаксная задача. Рассмотрим более сложную задачу, решение которой требует многократного применения операции усреднения.

Предположим, что при каждом $x \in X$ имеются случайные величины $f^1(x,\ \theta),\ \ldots,\ f^m(x,\ \theta)$ и случайные величины $q^k(x,\ z,\ \theta)$, $k = 1,\ \ldots,\ K$. Требуется найти такую точку $x \in R^n$, которая минимизирует функцию

$$F(x) = \max_k \mathsf{M} q^k(x,\ \mathsf{M} f^1(x,\ \theta),\ \ldots,\ \mathsf{M} f^m(x,\ \theta),\ \theta), \tag{5.28}$$

$$x \in X. \tag{5.29}$$

Предположим, что функция $F(x)$ выпуклая вниз,

$$g^i(x) = \mathsf{M} f^i(x,\ \theta), \qquad g(x) = (g^1(x),\ \ldots,\ g^m(x)),$$
$$Q^k(x,\ z) = \mathsf{M} q^k(x,\ z,\ \theta),\quad Q(x,\ z) = (Q^1(x,\ z),\ \ldots,\ Q^K(x,\ z)).$$

Пусть функции $g^i(x)$, $Q^k(x,\ z)$ имеют непрерывные первые производные по x, z. Если

$$Q^{k(x^s)}(x^s,\ g(x^s)) = \max_k Q^k(x^s,\ g(x^s)),$$

то вектор обобщенного градиента функции $F(x)$ есть

$$\hat{F}_x(x^s) = Q_x^{k(x^s)}(x^s,\ g(x^s)) + \sum_{i=1}^{m} Q_{z_i}^{k(x^s)}(x^s,\ g(x^s))\, g_x^i(x^s).$$

Так как в данном случае неизвестны $g(x^s)$, $Q(x^s, g(x^s))$, то естественно рассмотреть следующий алгоритм:

$$x^{s+1} = \pi_X (x^s - \rho_1(s) \xi^s), \tag{5.30}$$

$$y^{s+1} = y^s - \rho_2(s)(y^s - q(x^s, z^s, \theta^s)), \tag{5.31}$$

$$z^{s+1} = z^s - \rho_3(s)(z^s - f(x^s, \theta^s)), \tag{5.32}$$

где $s = 0, 1, \ldots$; ξ^s — такой случайный вектор, что

$$\mathsf{M}(\xi^s/(x^0, y^0, z^0), \ldots, (x^s, y^s, z^s)) = Q_x^{k_s}(x^s, z^s) + \sum_{i=1}^{m} Q_{z_i}^{k_s}(x^s, z^s) g_x^i(x^s);$$

k_s определяется соотношением

$$y_{k_s}^s = \max_k y_k^s.$$

Условное математическое ожидание вектора ξ^s совпадает с обобщенным градиентом функции цели в том случае, когда $z^s = g(x^s)$, $y^s = Q(x^s, g(x^s))$. Шаговые множители $\rho_2(s)$, $\rho_3(s)$ по крайней мере должны быть неотрицательными и

$$\sum \rho_2(s) = \infty, \quad \sum \rho_3(s) = \infty, \quad \rho_l(s) \to 0.$$

4. Численный метод. В соответствии с приведенными примерами задач со сложными функциями регрессии и теми процедурами, которые предлагались для их решения, изучим следующую общую процедуру минимизации.

Рассмотрим, как и в гл. III, пока безотносительно к задачам стохастического программирования минимизацию функции $F(x)$ в области X. Пусть имеются некоторые функции

$$Q(x, z) = (Q^1(x, z), \ldots, Q^K(x, z)),$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_m).$$

Обозначим через X^* множество решений рассматриваемой задачи, через Y, Z — такие множества, что

$$Q(x, g(x)) \in Y, \quad g(x) \in Z$$

при $x \in X^*$. Предположим, что X, Y, Z — ограниченные, замкнутые и выпуклые множества, $F(x)$ — выпуклая вниз функция. Определим последовательность точек (x^s, y^s, z^s)

соотношениями

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_1(s)\xi^s), \tag{5.33}$$

$$y^{s+1} = \pi_Y(y^s - \rho_2(s)(y^s - \vartheta^s)), \tag{5.34}$$

$$z^{s+1} = \pi_Z(z^s - \rho_3(s)(z^s - \lambda^s)), \tag{5.35}$$

где $s = 0, 1, \ldots$, шаговые множители $\rho_l(s)$, $l = 1, 2, 3$, неотрицательны и измеримы относительно σ-подалгебры $\mathscr{B}_s$, индуцированной последовательностью точек (x^s, y^s, z^s). Случайные векторы ξ^s, ϑ^s, λ^s таковы, что

$$\mathsf{M}(\xi^s/\mathscr{B}_s) = h(x^s, y^s, z^s) + b^1(s), \tag{5.36}$$

$$\mathsf{M}(\vartheta^s/\mathscr{B}_s) = Q(x^s, z^s) + b^2(s), \tag{5.37}$$

$$\mathsf{M}(\lambda^s/\mathscr{B}_s) = g(x^s) + b^3(s), \tag{5.38}$$

где случайные векторы $b^1(s)$, $b^2(s)$, $b^3(s)$ $\mathscr{B}$-измеримы; значения вектор-функции $h(x^s, y^s, z^s)$ удовлетворяют следующему основному соотношению: если $\|z^s - g(x^s)\| \to 0$ и $\|y^s - Q(x^s, z^s)\| \to 0$ п. н., то при малых ε и $\|x - x^s\| \leqslant \varepsilon$ имеем

$$\inf_{\{\hat{F}_x(x)\}} \|h(x^s, y^s, z^s) - \hat{F}_x(x)\| \to 0 \text{ п. н.} \tag{5.39}$$

Теорема 8. *Пусть справедливо* (5.39), *функции* $g(x)$, $Q(x, z)$ *непрерывны по переменным* x, z, *существует такая постоянная* C, *что*

$$\|\xi^s\| + \|\vartheta^s\| + \|\lambda^s\| + \|h(x^s, y^s, z^s)\| + \sum_{l=1}^{3} \|b^l(s)\| \leqslant C, \tag{5.40}$$

$$\rho_l(s) \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_l(s) = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_l(s)\|b^l(s)\| < \infty \text{ п. н.}, \tag{5.41}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}\rho_l^2(s) < \infty, \quad l = 1, 2, 3.$$

Кроме того, пусть $\rho_1(s)/\rho_2(s) \to 0$, $\rho_1(s)/\rho_3(s) \to 0$, *функции* $g(x)$, $Q(x, z)$ *удовлетворяют локальному условию Липшица.*

Тогда $\lim F(x^s) = F(x^*)$, $x^* \in X^*$ *п. н.*

Доказательство. Проверим справедливость условий теоремы 1. Метод (5.33) — (5.35) определяет последовательность точек (x^s, y^s, z^s), поэтому за множество решений примем множество таких точек (x^*, y^*, z^*), что $x^* \in X^*$, $y^* = Q(x^*, z^*)$, $z^* = g(x^*)$. Первые два условия теоремы 1 выполняются в силу (5.40), неравенства

$$\|x^{s+1}-x^s\|+\|y^{s+1}-y^s\|+\|z^{s+1}-z^s\|\leqslant$$
$$\leqslant\rho_1(s)\|\xi^s\|+\rho_2(s)\|y^s-\vartheta^s\|+\rho_3(s)\|z^s-\lambda^s\|$$

и того, что $\rho_i(s)\to 0$, $i=1, 2, 3$, $s\to\infty$. Дальнейшее доказательство проведем в три этапа.

Этап 1. Предположим, что $x^{s_k}\to x'$, $z^{s_k}\to z'$, $z'\neq g(x')$ и условия (5.3) не выполняются. Тогда для любого $\varepsilon>0$ при достаточно большом k и $s>s_k$ точка

$$(x^s,\ z^s)\in U_\varepsilon(x^{s_k},\ z^{s_k})=\{(x,\ z):\ \|x-x^{s_k}\|+\|z-z^{s_k}\|\leqslant\varepsilon\}.$$

Положим $W(x,\ z)=\|g(x)-z\|^2$. Имеем

$$\|g(x^{s+1})-z^{s+1}\|^2\leqslant\|g(x^{s+1})-z^s\|^2+$$
$$+2\rho_3(s)(z^s-\lambda^s,\ g(x^{s+1})-z^s)+\rho_3^2(s)\|z^s-\lambda^s\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|g(x^s)-z^s\|^2+2\|g(x^{s+1})-g(x^s)\|\|g(x^s)-z^s\|+$$
$$+\|g(x^{s+1})-g(x^s)\|^2+2\rho_3(s)(z^s-\lambda^s,\ g(x')-z^s)+$$
$$+2\rho_3(s)(z^s-\lambda^s,\ g(x^{s+1})-g(x'))+\rho_3^2(s)\|z^s-\lambda^s\|^2.$$

Так как $(x^s,\ u^s)\in U_\varepsilon(x^{s_k},\ z^{s_k})$, $x^{s_k}\to x'$, $z^{s_k}\to z'$, то при большом k можно считать, что $(x^s,\ z^s)\in U_{2\varepsilon}(x',\ z')$.

Используя локальное условие Липшица для $g(x)$, условие (5.40) и ограниченность множеств X, Z, получим

$$\|g(x^{s+1})-z^{s+1}\|^2\leqslant\|g(x^s)-z^s\|^2+2\rho_3(s)(z^s-\lambda^s,\ g(x')-z^s)+$$
$$+C\rho_3(s)\|g(x^{s+1})-g(x')\|+C\rho_1(s)+C(\rho_1^2(s)+\rho_3^2(s))=$$
$$=\|g(x^s)-z^s\|^2+2\rho_3(s)(z^s-g(x^s),\ g(x')-z^s)-$$
$$-2\rho_3(s)(\lambda^s-g(x^s)-b^3(s),\ g(x')-z^s)-$$
$$-2\rho_3(s)(b^3(s),\ g(x')-z^s)+C\rho_3(s)\|g(x^{s+1})-g(x')\|+C\rho_1(s)+$$
$$+C(\rho_1^2(s)+\rho_3^2(s))\leqslant\|g(x^{s_k})-z^{s_k}\|^2+$$
$$+2\sum_{l=s_k}^{s}\rho_3(l)\Big[(z^l-g(x^l),\ g(x')-z^l)+$$
$$+C\|g(x^{l+1})-g(x')\|+C\frac{\rho_1(l)}{\rho_3(l)}\Big]-$$
$$-2\sum_{l=s_k}^{s}\rho_3(l)(\lambda^l-g(x^l)-b^3(l),\ g(x')-z^l)+$$
$$+C\sum_{l=s_k}^{s}(\rho_1^2(l)+\rho_3^2(l)+\rho_3(l)\|b^3(l)\|).$$

Из (5.40) следует сходимость третьего ряда правой части полученного неравенства, а из (5.38) с учетом теоремы 1 гл. I следует сходимость и второго ряда. Поэтому при достаточно большом s_k их сумма по модулю не превышает некоторого $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Оценим значение первого ряда. Так как $z' \neq g(x')$, $\|x^s - x'\| \leqslant 2\varepsilon$, $g(x)$ — непрерывная функция, то при достаточно малом ε

$$(z^s - g(x^s),\ g(x') - z^s) =$$

$$= (z^s - g(x'),\ g(x') - z^s) + (g(x') - g(x^s),\ g(x') - z^s) \leqslant$$

$$\leqslant -\|z^s - g(x')\|^2 + C\|g(x') + g(x^s)\| < -\delta$$

для некоторого $\delta > 0$. По условиям теоремы $\rho_1(s)/\rho_3(s) \to 0$, поэтому выражение в квадратных скобках рассматриваемого ряда при больших s_k не превышает $-\frac{\delta}{2}$, т. е. получим

$$\|g(x^{s+1}) - z^{s+1}\|^2 \leqslant \|g(x^{s_k}) - z^{s_k}\|^2 - \delta \sum_{l=s_k}^{s} \rho_3(l) + \varepsilon_k, \tag{5.42}$$

что при $s \to \infty$ в силу расходимости ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \rho_3(l)$ противоречит неотрицательности левой части неравенства. Следовательно, условие (5.3) имеет место.

Покажем, что выполняется и условие (5.4). Пусть

$$\tau_k = \min_{s > s_k} \{s\colon\ \|x^s - x^{s_k}\| + \|z^s - z^{s_k}\| > \varepsilon\}.$$

По определению $(x^{\tau_k}, z^{\tau_k}) \bar{\in} U_\varepsilon(x^{s_k}, z^{s_k})$, $(x^{\tau_k - 1}, z^{\tau_k - 1}) \in U_\varepsilon(x^{s_k}, z^{s_k})$. Так как $\rho_i(s) \to 0$, $s \to \infty$, $i = 1, 2, 3$, то при большом k можно считать, что

$$(x^{\tau_k}, z^{\tau_k}) \in U_{2\varepsilon}(x^{s_k}, z^{s_k}),\quad (x^{\tau_k}, z^{\tau_k}) \in U_{4\varepsilon}(x', z').$$

Поэтому неравенство (5.42) остается верным и при $s =$

$= \tau_k - 1$. С другой стороны,

$$\varepsilon < \| x^{\tau_k} - x^{s_k} \| + \| z^{\tau_k} - z^{s_k} \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} (\| x^{l+1} - x^l \| + \| z^{l+1} - z^l \|) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} (\rho_1(l) + \rho_3(l)) \leqslant C \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \rho_3(l),$$

так как $\rho_1(s)/\rho_3(s) \to 0$, $s \to \infty$. То есть $\sum\limits_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \rho_3(l) > \frac{\varepsilon}{C}$, что после подстановки в (5.42) при $s = \tau_k - 1$ дает

$$\| g(x^{\tau_k}) - z^{\tau_k} \|^2 \leqslant \| g(x^{s_k}) - z^{s_k} \|^2 - \frac{\varepsilon\delta}{C} + \varepsilon_k$$

или

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, W(x^{\tau_k}, z^{\tau_k}) < \lim_{k \to \infty} W(x^{s_k}, z^{s_k}),$$

т. е. (5.4) также выполняется.

В силу теоремы 1 это значит, что $\{ \| g(x^s) - z^s \| \}$ сходится и для каждой сходящейся подпоследовательности $x^{s_k} \to x'$, $z^{s_k} \to z'$ значение $\| g(x^{s_k}) - z^{s_k} \| \to 0$. Отсюда следует, что и $\| g(x^s) - z^s \| \to 0$ при $s \to \infty$.

Этап 2. Пусть $x^{s_k} \to x'$, $y^{s_k} \to y'$, $y' \neq Q(x', g(x'))$ и условие (5.3) не выполняется. Положим $W(x, y) = \| y - Q(x, g(x)) \|$. Имеем

$$\| Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^{s+1} \|^2 \leqslant \| Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^s \|^2 +$$
$$+ 2\rho_2(s)(y^s - \vartheta^s, Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^s) + \rho_2^2(s) \| y^s - \vartheta^s \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| Q(x^s, g(x^s)) - y^s \|^2 +$$
$$+ 2 \| Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - Q(x^s, g(x^s)) \| \| Q(x^s, g(x^s)) - y^s \| +$$
$$+ \| Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - Q(x^s, g(x^s)) \|^2 +$$
$$+ 2\rho_2(s)(y^s - \vartheta^s, Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^s) + \rho_2^2(s) \| y^s - \vartheta^s \|^2.$$

Дальнейшие рассуждения во многом напоминают рассуждения этапа 1, поэтому отметим только их основные моменты. Так как $(x^s, y^s) \in U_\varepsilon(x^{s_k}, y^{s_k})$, $(x^s, y^s) \in U_{2\varepsilon}(x', y')$, то, используя локальное условие Липшица для $Q(x, z)$, условия (5.40), ограниченность множеств X,

Y, после очевидных преобразований получим, что

$$\|Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^{s+1}\|^2 \leqslant \|Q(x^{s_k}, g(x^{s_k})) - y^{s_k}\|^2 +$$
$$+ 2\sum_{l=s_k}^{s} \rho_2(l)\left[(y^l - Q(x^l, g(x^l)), Q(x', g(x')) - y') + \right.$$
$$\left. + C\|Q(x^l, g(x^l)) - Q(x^l, z^l)\| + C\frac{\rho_1(l)}{\rho_2(l)}\right] -$$
$$- 2\sum_{l=s_k}^{s} \rho_2(l)(\vartheta^l - Q(x^l, z^l) - b^2(l), Q(x', g(x')) - y^l) +$$
$$+ C\sum_{l=s_k}^{s} [\rho_1^2(l) + \rho_2^2(l) + \rho_3(l)\|b^2(l)\|].$$

Снова сумма второго и третьего ряда по модулю не превышает некоторого $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Так как $y' \neq Q(x', g(x'))$, то

$$(y^l - Q(x^l, g(x^l)), Q(x', g(x')) - y^l) < -\delta,$$

и если учесть, что по доказанному на первом этапе $\|z^l - g(x^l)\| \to 0$ и, кроме того, $\rho_1(l)/\rho_2(l) \to 0$, $l \to \infty$, то получим неравенство, аналогичное (5.42):

$$\|Q(x^{s+1}, g(x^{s+1})) - y^{s+1}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|Q(x^{s_k}, g(x^{s_k})) - y^{s_k}\|^2 - \delta\sum_{l=s_k}^{s} \rho_2(l) + \varepsilon_k,$$

с использованием которого дальнейшая проверка условий (5.3), (5.4) для рассматриваемого на этом этапе случая полностью аналогична тому, как это было сделано на этапе 1.

Отсюда получаем, что $\|Q(x^s, z^s) - y^s\| \to 0$ п. н. при $s \to \infty$.

Этап 3. Предположим, что $x^{s_k} \to x' \in X^*$ и (5.3) не выполнено. Тогда $x^s \in U_\varepsilon(x^{s_k}) = \{x : \|x - x^{s_k}\| \leqslant \varepsilon\}$. Положим $W(x, y, z) = \min\|x^* - x\|^2$. Имеем при $\|\bar{x}^s - x^s\| \leqslant \varepsilon$

$$W(x^{s+1}, y^{s+1}, z^{s+1}) \leqslant$$
$$\leqslant W(x^s, y^s, z^s) + 2\rho_1(s)(\xi^s, x^*(s) - x^s) + \rho_1^2(s)\|\xi^s\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant W(x^s, y^s, z^s) + 2\rho_1(s)(\xi^s - h(x^s, y^s, z^s) - b^1(s), x^*(s) - x^s) +$$
$$+ 2\rho_1(s)(h(x^s, y^s, z^s) - \hat{F}_x(\bar{x}^s), x^*(s) - x^s) +$$
$$+ 2\rho_1(s)(b^1(s), x^*(s) - x^s) +$$
$$+ 2\rho_1(s)(\hat{F}_x(\bar{x}^s), x^*(s) - x^s) + C\rho_1^2(s).$$

Отсюда при $s > s_k$ получаем

$$W(x^{s+1}, y^{s+1}, z^{s+1}) \leq W(x^{s_k}, y^{s_k}, z^{s_k}) + $$
$$+ 2\sum_{l=s_k}^{s} \rho_1(l)\left[(\hat{F}_x(\bar{x}^l), x^* - x^l) + C\left\|h(x^l, y^l, z^l) - \hat{F}_x(\bar{x}^l)\right\|\right] +$$
$$+ C\sum_{l=s_k}^{s} \rho_1(l)(\xi^l - h(x^l, y^l, z^l) - b^1(l), x^*(s) - x^l) +$$
$$+ C\sum_{l=s_k}^{s}[\rho_1(l)\|b^1(l)\| + \rho_1^2(l)].$$

Аналогично этапу 1, второй и третий ряд правой части этого неравенства не превышает $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Оценим значение первого ряда. При достаточно большом k можно считать, что $x^s \in U_{2\varepsilon}(x')$, и так как $x' \bar{\in} X^*$, то $(\hat{F}_x(\bar{x}^s), x^*(s) - x^s) < -\delta$ для некоторого $\delta > 0$. Следовательно,

$$W(x^{s+1}, y^{s+1}, z^{s+1}) \leq W(x^{s_k}, y^{s_k}, z^{s_k}) +$$
$$+ 2\sum_{l=s_k}^{s} \rho_1(l)\left[-\delta + C\left\|h(x^l, y^l, z^l) - \hat{F}_x(\bar{x}^l)\right\|\right] + \varepsilon_k.$$

В силу первых двух этапов имеет место (5.39). Так как последнее неравенство справедливо для любого $\hat{F}_x(\bar{x}^l)$, то можно считать, что при большом l $\|h(x^l, y^l, z^l) - \hat{F}_x(\bar{x}^l)\| < \delta/2C$. Тогда

$$W(x^{s+1}, y^{s+1}, z^{s+1}) \leq W(x^{s_k}, y^{s_k}, z^{s_k}) - \delta\sum_{l=s_k}^{s} \rho_1(l) + \varepsilon_k,$$

т. е. справедливо неравенство, аналогичное (5.42). Дальнейшая проверка свойств (5.3), (5.4) ничем не отличается от этапа 1. Таким образом, на основе теоремы 1 получаем, что $\{\min\|x^* - x^s\|^2\}$ сходится и каждая сходящаяся подпоследовательность $x^{s_k} \to x' \in X^*$. Отсюда следует, что $\{F(x^s)\}$ сходится и $\lim F(x) = F(x^*)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В методе (5.33) — (5.35) операция усреднения применялась дважды. Легко понять, что подобным образом можно изучать процедуры решения с многократным применением этой операции.

5. Пример. Убедимся в том, что методы, рассмотренные в пп. 2, 3, удовлетворяют условиям доказанной теоремы. Можно ограничиться проверкой условий теоремы 8 только для процедуры п. 3, так как она превращается в метод п. 2 при $k=1$. Для задачи (5.28) – (5.29)

$$g^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta), \quad Q^k(x, z) = \mathsf{M} q^k(x, z, \theta),$$

и эти функции удовлетворяют условиям непрерывности, которые предполагаются в теореме 8.

Далее,

$$h(x^s, y^s, z^s) = Q_x^{k_s}(x^s, z^s) + \sum_{i=1}^{m} Q_{z_i}^{k_s}(x^s, z^s) g_x^i(x^s),$$

где k_s выбирается из условия

$$y_{k_s}^s = \max_k y_k^s.$$

Пусть

$$\| z_i^s - g^i(x^s) \| \to 0, \quad | y_k^s - Q^k(x^s, z^s) | \to 0,$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, K;$$

x^s сходится. Тогда в силу непрерывности функций Q^k по $x \in X$, $z \in Z$ имеем

$$| y_k^s - Q^k(x^s, g(x^s)) | \leqslant | y_k^s - Q^k(x^s, z^s) | + \\ + | Q^k(x^s, z^s) - Q^k(x^s, g(x^s)) | \to 0$$

при $s \to \infty$. Поэтому, если

$$\| x - x^s \| \leqslant \varepsilon,$$

то

$$\inf_{\hat{F}_x} | h(x^s, y^s, z^s) - \hat{F}_x(x) | \to 0 \text{ при } s \to \infty.$$

Остальные условия теоремы 8 являются стандартными. Ограниченность областей X, Y, Z не являетcя существенным требованием и обычно выполняется в реальных задачах. Требование (5.40), как правило, является следствием ограниченности X, Y, Z, поскольку распределение помех чаще всего имеет усеченный характер.

6. Стохастический метод штрафов. Процедура (5.33) — (5.35) позволяет обосновать методы штрафных функций в общих задачах стохастического программирования. Рассмотрим минимизацию функции

$$F^0(x) = \mathsf{M} f^0(x, \theta) \tag{5.43}$$

при ограничениях

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.44}$$

$$x \in X. \tag{5.45}$$

В методах штрафных функций дополнительные ограничения (5.44) к ограничениям (5.45), определяющим область, на которую можно проектировать, учитываются введением в функцию цели искусственных слагаемых (штрафных функций или функций нагружения), принимающих большие значения при нарушении этих ограничений. Например, задача (5.43) — (5.45) заменяется минимизацией функции

$$F(x, c) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i(F^i(x))\, F^i(x) \tag{5.46}$$

или функции

$$F(x, c) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i(F^i(x))\, [F^i(x)]^2, \tag{5.47}$$

где

$$c_i(\alpha) = \begin{cases} C, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

C — достаточно большое число, при ограничениях (5.45). Так как в задачах стохастического программирования значения $F^i(x)$ неизвестны, то обычными приемами решить получаемую при этом задачу минимизации функции (5.46) или (5.47) невозможно, поскольку нельзя вычислить значение $c_i(F^i(x))$. Функции цели (5.46), (5.47) являются примерами сложных функций регрессии, поэтому здесь можно применить процедуру (5.33) — (5.35). Так, если требуется минимизировать (5.46) при ограничениях (5.45), где функции $f^\nu(x, \theta)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, вычисляются точно и почти при каждом θ непрерывно дифференцируемы, выполняются все требования, достаточные для существования необходимых интегралов, дифференцирования под знаком интеграла и т. п., то получаем следующий стохастический метод штрафов:

$$x^{s+1} = \pi_X\left(x^s - \rho_s\left[f_x^0(x^s,\ \theta^s) + \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^s) f_x^i(x^s,\ \theta^s)\right]\right),$$
$$z^{s+1} = \pi_Z(z^s + \delta_s[f(x^s,\ \theta^s) - z^s]),$$

где $s = 0, 1, \ldots$, точки x^0, z^0 произвольные, величины ρ_s, δ_s удовлетворяют следующим условиям теоремы 8:

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \delta_s \geqslant 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s = \infty,$$
$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M}(\rho_s^2 + \delta_s^2) < \infty.$$

В более общем случае стохастический метод штрафов, получаемый исходя из функции (5.46), может иметь следующий вид:

$$x^{s+1} = \pi_X\left(x^s - \rho_s\left[\xi^0(s) + \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^s)\,\xi^i(s)\right]\right), \tag{5.48}$$
$$z^{s+1} = \pi_Z(z^s + \delta_s[\zeta^s - z^s]), \tag{5.49}$$

где $s = 0, 1, \ldots$, точки x^0, z^0 произвольные,

$$\mathsf{M}(\xi^\nu(s)/(x^0,\ z^0),\ \ldots,\ (x^s,\ z^s)) = \hat{F}_x^\nu(x^s) + b^\nu(s),$$
$$\mathsf{M}(\zeta^\nu(s)/(x^0,\ z^0),\ \ldots,\ (x^s,\ z^s)) = F(x^s), \quad F = (F^1,\ \ldots,\ F^m).$$

Для вектора $\xi^s = \xi^0(s) + \sum c_i(z_i^s)\,\xi^i(s)$ имеем

$$\mathsf{M}(\xi^s/(x^0,\ z^0),\ \ldots,\ (x^s,\ z^s)) = \hat{F}_x^0(x^s) + \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^s)\,\hat{F}_x^i(x^s) + b^s, \tag{5.50}$$

где $b^s = b^0(s) + \sum c_i(z_i^s)\,b^i(s)$. При $z_i^s = F^i(x^s)$ сумма $\hat{F}_x^0(x^s) + \sum c_i(z_i^s)\,\hat{F}_x^i(x^s)$ совпадает с обобщенным градиентом минимизируемой функции (5.46), т. е. выполняется одна из предпосылок теоремы 8 и для сходимости x^s, определенной согласно (5.48) — (5.49), к точкам минимума функции (5.46) в области X (а при достаточно большом C — к решениям исходной задачи (5.43) — (5.45)), величины ρ_s, δ_s

следует выбирать так, как этого требуют остальные условия теоремы.

Очевидно, аналогичным образом можно построить другие стохастические варианты методов штрафных функций, например, основанные на функциях вида (5.47). При этом можно воспользоваться идеей решения предельной экстремальной задачи — величину штрафа C рассматривать как переменную величину C_s, зависящую от номера итерации s, и, устремляя C_s к предельному значению, достигать при $s \to \infty$ точного решения исходной задачи. Из общих теорем § 3 следует, что изменять C_s можно по произвольному закону.

7. Усреднение направлений спуска. В стохастических квазиградиентных методах за направление спуска на каждой итерации выбирается случайный вектор ξ^s, условное математическое ожидание которого близко к градиенту или обобщенному градиенту минимизируемой функции (или ограничений). Процедура (5.33) — (5.35) позволяет рассматривать методы, в которых за направление спуска в произвольной s-й итерации вместо ξ^s выбирается усредненное направление вида $\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s} \xi^k$ или, в общем случае, направление x^s, получаемое с помощью соотношений

$$z^{s+1} = z^s - \delta_s (z^s - \xi^{s+1}),$$

где $z^0 = \xi^0$, $s = 0, 1, \ldots$ Эти соотношения можно дополнить операцией проектирования на выпуклую ограниченную замкнутую область $Z \supseteq \{z\colon z = \hat{F}_x(x),\ x \in X^*\}$, где X^* — множество решений. Например, вместо стохастического квазиградиентного метода вида

$$x^{s+1} = \pi_X (x^s - \rho_s \xi^s),$$

изученного в гл. III, можно рассматривать метод

$$x^{s+1} = \pi_X (x^s - \rho_s z^s), \tag{5.51}$$

$$z^{s+1} = \pi_Z (z^s - \delta_s [z^s - \xi^{s+1}]), \tag{5.52}$$

где

$$\mathsf{M}(\xi^s/(x^0, z^0), \ldots, (x^s, z^s)) = \hat{F}_x(x^s) + b^s.$$

Так как

$$\mathsf{M}(z^s/(x^0, z^0), \ldots, (x^s, z^s)) = z^s,$$

то процедура (5.51) — (5.52) является частным случаем процедуры (5.33) — (5.35) при $g(x^s) = F_x(x^s)$, $h(x^s, y^s, z^s) = z^s$, поэтому условия сходимости (5.51) — (5.52) легко следуют из теоремы 8. Целесообразность применения операции усреднения может быть вызвана стремлением сделать процедуру спуска более регулярной (отфильтровать помехи), однако следует иметь в виду, что значение z^s определяется, вообще говоря, всеми предыдущими направлениями $\xi^0, \ldots, \xi^s$, хотя с помощью δ_s можно регулировать степень влияния предыстории. Зависимость направления спуска от предыстории, вернее, усреднение направления спуска по предыстории иногда бывает выгодно даже в детерминированных методах, не подверженных влиянию помех, что легко понять из рис. 11, на котором изображены вытянутая линия уровня и направления спуска в двух последовательных итерациях. Среднее направление дает направление вдоль «оврага».

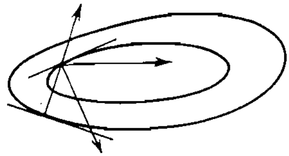

Рис. 11.

§ 5. Стохастическая процедура линеаризации. Потоки в стохастических сетях

1. Стохастический метод линеаризации. Операция проектирования на область X равносильна минимизации суммы квадратов при наличии ограничений $x \in X$. Поэтому, если задача отыскания

$$\min F(x), \tag{5.53}$$

$$x \in X \tag{5.54}$$

решается с использованием операции проектирования π_X, то это фактически означает, что область X имеет простой вид. В стохастическом методе линеаризации, который рассматривается ниже, операция проектирования заменена минимизацией в X линейной функции.

Рассмотрим задачу (5.53) — (5.54), где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая функция. Чтобы не вводить нормирующих множителей, предположим, что X — ограниченная замкнутая область. Рассмотрим случайные последовательности точек x^s, z^s, определенные соотношениями

$$x^{s+1} = x^s + \rho_s (\bar{x}^s - x^s), \tag{5.55}$$

$$z^{s+1} = \pi_Z (z^s + \delta_s (\xi^s - z^s)), \tag{5.56}$$

$$(z^s, \bar{x}^s) = \min_{x \in X} (z^s, x), \tag{5.57}$$

где $x^0 \in X$, $z^0 \in Z$ — произвольные точки, $s = 0, 1, \ldots$,

$$\mathsf{M} (\xi^s / (x^0, z^0), \ldots, (x^s, z^s)) = F_x (x^s) + b^s,$$

Z — выпуклое ограниченное множество, для которого $Z \supseteq \{F_x (x), x \in X^*\}$. Величины ρ_s, δ_s, b^s предполагаются измеримыми относительно σ-алгебры, индуцированной величинами $(x^0, z^0, \ldots, x^s, z^s)$.

В данном методе соотношения (5.57) заменяют операцию проектирования. Интересно отметить, что если вместо z^s в соотношения (5.57) подставить непосредственно $\xi^s (\omega)$, то процедура (5.55) — (5.57), как показывают простые примеры, может не сойтись.

Чтобы не вводить нормирующих множителей, предположим, что существует постоянная C такая, что

$$\|\xi^s\| + \|F_x (x^s)\| + \|b^s\| \leqslant C. \tag{5.58}$$

Теорема 9. *Пусть справедливо условие* (5.58); *пусть X — ограниченное множество, а $F (x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица; пусть*

$$\rho_s \geqslant 0, \quad \delta_s \geqslant 0, \quad \rho_s / \delta_s \to 0,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s = \infty, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \overset{\delta_s}{\rho_s} \|b^s\| < \infty \text{ п.н.},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathsf{M} (\rho_s^2 + \delta_s^2) < \infty.$$

Тогда последовательность $F (x^s)$ сходится п. н. и каждая предельная точка $\{x^s\}$ принадлежит

$$X^* = \{x^*: \min_{x \in X} (F_x (x^*), x - x^*) = 0\}.$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1. Очевидно, в доказательстве нуждаются только условия (5.3), (5.4). Пусть $x^{s_k} \to x'$, $z^{s_k} \to z'$ и (5.3) не выполнено. Тогда $\|x^s - x^{s_k}\| < \varepsilon$ при $s \geqslant s_k$. Положим $W(x) = F(x)$. Имеем

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) = (F_x(x^{s_k}),\ x^s - x^{s_k}) + o(\varepsilon).$$

Так как $x^s - x^{s_k} = \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l (\bar{x}^l - x^l)$, то

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) = \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l (F_x(x^{s_k}),\ \bar{x}^l - x^l) + o(\varepsilon). \tag{5.59}$$

Оценим $(F_x(x^{s_k}),\ \bar{x}^l - x^l)$. Так как $x' \bar{\in} X^*$, то $\min_{x \in X} (F_x(x'),\ x - x') < -\Delta$, где $\Delta > 0$. В силу непрерывности $F_x(x)$ подобное неравенство справедливо и в некоторой окрестности x'. Отсюда получаем следующую цепочку неравенств.

Прежде всего, $\min_{x \in X} (F_x(x^l),\ x - x^l) < -\Delta$, ибо можно считать, что $\|x^l - x'\| \leqslant 2\varepsilon$ при ε достаточно малом. Аналогично этапу 1 доказательства теоремы 8 можно показать, что $\|z^l - F_x(x^l)\| \to 0$ п.н. при $l \to \infty$, поэтому при большом l и $\min_{x \in X} (z^l,\ x - x^l) = (z^l,\ \bar{x}^l - x^l) < -\Delta$, а также $(F_x(x^l),\ \bar{x}^l - x^l) < -\Delta$. Так как $\|x^l - x^{s_k}\| < \varepsilon$, то и $(F_x(x^{s_k}),\ \bar{x}^l - x^l) < -\Delta$. Тогда из (5.59) получим

$$F(x^s) - F(x^{s_k}) \leqslant -\Delta \sum_{l=s_k}^{s-1} \rho_l + o(\varepsilon), \tag{5.60}$$

что при $s \to \infty$ противоречит ограниченности снизу левой части этого неравенства.

Докажем (5.4). Пусть

$$\tau_k = \min_{s > s_k} \{s:\ \|x^s - x^{s_k}\| > \varepsilon\}.$$

По определению $x^{\tau_k} \in U_\varepsilon(x^{s_k}) = \{x:\ \|x - x^{s_k}\| < \varepsilon\}$, $x^{\tau_{k-1}} \in U_\varepsilon(x^{s_k})$. Так как $\rho_s \to 0$, то при большом k $x^{\tau_k} \in U_{2\varepsilon}(x^{s_k})$ и $x^{\tau_k} \in U_{3\varepsilon}(x')$, т. е. остаются в силе все рассуждения, проделанные при выводе (5.60), и для $s = \tau_k$. С другой стороны, с учетом (5.58) имеем

$$\varepsilon < \|x^{\tau_k} - x^{s_k}\| \leqslant \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \|x^{l+1} - x^l\| \leqslant C \sum_{l=s_k}^{\tau_k - 1} \rho_l,$$

что при подстановке для $s=\tau_k$ в (5.60) дает

$$F(x^{\tau_k}) \leqslant F(x^{s_k}) - \frac{\varepsilon\Delta}{C} + o(\varepsilon).$$

Переходя к пределу по $k\to\infty$, получим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} F(x^{\tau_k}) < \lim_{k\to\infty} F(x^{s_k}),$$

что и требовалось доказать.

2. Оптимальные потоки в сетях. Применим метод линеаризации к решению важных специальных задач стохастического программирования, связанных с оптимальным распределением потоков в стохастических сетях.

Понятие потока в сети является математической абстракцией реальных грузопотоков в транспортной сети, потока жидкости по трубопроводу, потока сообщений в системе связи.

Пусть дан *конечный граф* (I, U), т. е. множество точек (вершин) $I=\{1, \ldots, n\}$, соединенных между собой линиями со стрелками (дугами) $(i, j)\in U$. Если $(i, j)\in U$, то считается, что стрелка направлена из i в j — дуга исходит из вершины i и заходит в j. *Сетью* принято считать граф, элементам которого поставлены в соответствие некоторые числовые параметры. Рассмотрим сеть, поставив в соответствие каждой вершине i вектор $d^i=(d_i^1, \ldots, d_i^r)$, называемый *вектором интенсивностей*; каждой дуге (i, j) — положительное число r_{ij}^k, называемое *пропускной способностью*.

Неоднородным потоком в рассматриваемой сети называется вектор-функция $x_{ij}=(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^r)$, определенная на U и удовлетворяющая следующим *уравнениям непрерывности*:

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = d_i^k, \quad i\in I, \quad k=1, \ldots, r, \qquad (5.61)$$

при условии, что

$$0\leqslant x_{ij}^k \leqslant r_{ij}^k, \quad (i, j)\in U, \quad k=1, \ldots, r. \qquad (5.62)$$

Оптимальным неоднородным потоком будет тот из множества неоднородных потоков, который минимизирует функционал

$$\sum_{i,j} c_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^r), \qquad (5.63)$$

где функции $c_{ij}(\cdot)$ называются *дуговыми функциями цели*. Задача поиска оптимального неоднородного потока называется *неоднородной сетевой задачей*. Значение вектор-функции x_{ij} на дуге (i, j) называется *величиной неоднородного потока* по этой дуге. Функция x_{ij}^k при фиксированном k (k-я компонента вектор-функции x_{ij}) называется *потоком k-го вида* или *k-м потоком по дуге* (i, j).

Уравнения непрерывности означают, что в любой вершине i для любого k-го потока разность между суммарной величиной потока $\sum\limits_j x_{ij}^k$, втекающего в эту вершину, и величиной потока $\sum\limits_j x_{ji}^k$, вытекающего из нее, равна k-й интенсивности d_i^k. Вершина i, для которой $d_i^k > 0$, называется *источником* k-го потока; вершина i, для которой $d_i^k < 0$, — *стоком* k-го потока, а вершина i, для которой $d_i^k = 0$, — *нейтральной* для k-го потока. Одна и та же вершина может быть источником одного потока, стоком другого и нейтральной третьего. В дальнейшем рассматриваются только конечные графы (с конечным числом вершин и дуг).

Стохастические задачи при изучении потоков в сетях возникают весьма часто. Это прежде всего всевозможные задачи планирования потоков на перспективу с неопределенным будущим, например задачи размещения предприятий при случайном спросе, планирования потока товаров в системах управления запасами, потока заявок (требований) в системах обслуживания.

Рассмотрим неоднородную сетевую задачу при условии, что значение $c_{ij}(x)$ при каждом $x = (x_1, \ldots, x_r)$, $(i, j) \in U$, можно определить только со случайными ошибками. Например, если $c_{ij}(x) = \mathsf{M} f_{ij}(x, \theta)$, где θ — элементарное событие вероятностного пространства $(\Theta, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Требуется найти поток, минимизирующий

$$\sum_{i,j} \mathsf{M} f_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^r, \theta). \tag{5.64}$$

3. Пример. Об одной задаче маршрутизации. Рассмотрим один важный пример задачи (5.61) — (5.64), связанный с вопросами градостроительства. При планировке новых районов города важно заранее учесть

объемы грузопотоков по тем или иным магистралям. План города можно представить графом (I, U), дуги которого соответствуют улицам, а вершины — пунктам отправления (источники), пунктам назначения (стоки) и перекресткам улиц (нейтральные вершины). В качестве пунктов отправления и назначения могут выступать некоторые фиктивные, обобщенные отправители и потребители, объемы поставок и потребления которых соответствуют поставкам и потреблению целых районов города. Дуги графа могут отвечать только наиболее существенным участкам дорог.

Предположим, что между определенными пунктами отправления и назначения фиксированы объемы поставок. В этом случае даже для однородного продукта задача планирования перевозок равносильна некоторой многопродуктовой транспортной задаче (неоднородной сетевой), если считать, что имеется продукт не одного вида, а стольких, сколько всего фиксированных поставок. Иначе говоря, каждой фиксированной поставке как бы соответствует свой продукт, которого нет и не требуется в других пунктах, кроме фиксированных. Тогда задача составления маршрутов движения грузов от отправителей к получателям равносильна решению задачи (5.61)—(5.64), где в качестве затрат $f_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^r, \theta)$ выступает время передвижения по дуге (i, j) x_{ij}^1 транспортных единиц от 1-го источника, x_{ij}^2 транспортных единиц от 2-го источника, ..., x_{ij}^r транспортных единиц от r-го источника (различные источники могут находиться в одной и той же вершине). Функцию $f_{ij}(x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^r, \theta)$ при этом θ и $(i, j) \in U$ можно считать выпуклой вниз функцией, зависящей от величины общего потока $\sum_k x_{ij}^k$ (время передвижения одной транспортной единицы возрастает с увеличением общего потока).

4. Пример. Об одной задаче управления запасами. На складе в начальный момент времени имеется в наличии α_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, товара k-го вида. В течение промежутка времени от 1 до n разрешается купля и продажа этих товаров. Предположим, что полное количество k-го товара, которое можно купить за время n, равно b_k. Спрос на k-й товар в i-й момент

времени, $i=1, \ldots, n$, является случайной величиной θ_i^k с функцией распределения H_i^k.

Необходимо определить α_i^k — количество k-го товара, которое следует направить для продажи в интервале времени $[i, i+1]$, β_i^k — количество k-го товара, приобретенное в интервале времени $[i, i+1]$, γ_i^k — количество k-го товара, хранящееся на складе в интервале времени $[i, i+1]$ после того, как часть товара была отправлена в продажу, δ_i^k — количество k-го товара, хранящееся на складе в интервале времени $[i, i+1]$ после покупки нового товара.

Представим процесс купли и продажи в виде графа, изображенного на рис. 12 для $n=4$. Вершины графа,

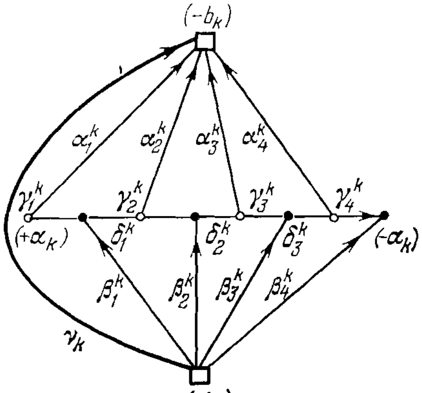

Рис. 12.

изображенные кружками и точками, соответствуют различным состояниям, в которых может оказаться склад в результате купли и продажи. Условимся считать, что продажа товара происходит в моменты времени $i=1, 2, \ldots, n$ (в вершинах, изображенных кружками), а покупка — в середине каждого интервала $[i, i+1]$ (в вершинах, изображенных точками). Квадратиками изображены две фиктивные вершины. Нижняя отвечает фиктивному поставщику товаров на склад, у которого имеется b_k, $k=1, \ldots, r$, единиц товара k-го вида; верхняя — фиктивному покупателю, которому требуется

b_k, $k=1, \ldots, r$, товара k-го вида. Так как каждого товара будет продано не обязательно b_k единиц и чтобы для этих вершин выполнялись уравнения непрерывности, между ними введена фиктивная дуга, которой отвечают фиктивные переменные ν_k, $k=1, \ldots, r$. Другим дугам отвечают переменные β_i^k, γ_i^k, δ_i^k, что указано возле каждой дуги.

5. Численный метод. Пусть $X=\left\{x_{ij}^k: (i, j)\in U, k=1, \ldots, r\right\}$, $Z=\left\{z_{ij}^k: (i, j)\in U, k=1, \ldots, r\right\}$, X^* — множество оптимальных неоднородных потоков, $x^k = \left\{x_{ij}^k: (i, j)\in U\right\}$, $z^k=\left\{z_{ij}^k: (i, j)\in U\right\}$, $c_{ij}^{(k)}(x)$ — частная производная функции $c_{ij}(x)$ по x_{ij}^k, $f_{ij}^{(k)}(x, \theta)$ — частная производная функции $f_{ij}(x, \theta)$ по x_{ij}^k,

$$f^{(k)}=\left\{f_{ij}^{(k)}: (i, j)\in U\right\},$$

$$Z_k=\left\{c_{ij}^{(k)}(x): (i, j)\in U, x\in X^*\right\}.$$

Предположим, что $x(0)$ — произвольный начальный поток, $z(0)=\left\{f_{ij}^{(k)}(x(0), \theta^0): (i, j)\in U, k=1, \ldots, r\right\}$. Тогда метод линеаризации (5.55) — (5.57) отвечает следующим вычислениям:

$$x(s+1)=x(s)+\rho_s(\bar{x}(s)-x(s)), \tag{5.65}$$

$$z^k(s+1)=\pi_{Z_k}(z^k(s)+\delta_s[f^{(k)}(x^s, \theta^s)-z^k(s)]), \tag{5.66}$$

где $s=0, 1, \ldots$; $k=1, \ldots, r$; $\bar{x}(s)=(\bar{x}^1(s), \ldots, \bar{x}^r(s))$, $\bar{x}^k(x)=\left\{\bar{x}_{ij}^k\right\}$ — решение следующей линейной задачи об однородном потоке в сети.

Минимизировать при данном k $(k=1, \ldots, r)$

$$\sum_{i,j} z_{ij}^k x_{ij}^k$$

при условиях

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = d_i^k, \qquad i=1, \ldots, n,$$

$$0\leqslant x_{ij}^k\leqslant r_{ij}^k, \quad (i, j)\in U.$$

§ 6. О методах стохастического программирования с конечным числом испытаний

1. Рассматриваемые в этом параграфе методы можно применять в дискретных задачах стохастического программирования. Пусть требуется минимизировать детерминированную функцию $f^0(x)$ при стохастических ограничениях, т. е. найти

$$\min f^0(x), \tag{5.67}$$

$$F^i(x) = \mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.68}$$

$$x \in X, \tag{5.69}$$

к чему легко свести общие задачи путем введения дополнительной переменной. Как уже неоднократно отмечалось, трудность решения задач, подобных (5.67) — (5.69), заключается в сложности проверки ограничений (5.68). В прямых методах стохастического программирования контроль (5.68) осуществляется вероятностными методами с помощью испытаний θ^s над состоянием природы θ. При этом точное решение задачи (5.67) — (5.69) получается при бесконечном числе испытаний, когда $s \to \infty$. В ряде случаев нельзя рассчитывать на проведение достаточно большого чи ла испытаний, а дано только некоторое ограниченное число испытаний, которыми следует распорядиться так, чтобы найти решение $x \in X$, которое с наибольшей гарантией удовлетворяет (5.68) и минимизирует (5.67).

В этом случае нельзя надеяться на поиск решений, которые будут удовлетворять ограничениям (5.68) точно, так как при заданном x невозможно достоверно проверить с помощью конечного числа испытаний статистическую гипотезу о том, что

$$\mathsf{M} f^i(x, \theta) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому прежде всего возникает вопрос о том, какие решения $x \in X$ следует считать допустимыми. Очевидно, допустимыми решениями уже не будут только те, которые удовлетворяют (5.68), — это должно определяться возможностями статистического критерия, который применяется для проверки (5.68). Иначе говоря, требуется при заданной ошибке, к которой может привести выбранный статистический критерий проверки (5.68), найти решение, минимизирующее (5.67). Ниже для отдельных частных случаев будет показано, что такая постановка приводит к сложным экстремальным задачам частично-дискретного программирования. Следует отметить, что при этом, по всей видимости, вряд ли можно охватить общие случаи, так как проверка статистических гипотез существенно опирается на знание законов распределения случайных величин $f^i(x, \theta)$, а в нашем случае они зависят от x и меняются с изменением x.

2. Вероятностные ограничения. Как указывалось, понятие допустимого решения при конечном числе испытаний над θ должно быть определено в соответствии с выбранным критерием проверки ограничений (5.68). Следует заметить, что эти критерии существенно зависят от того, какое распределение имеет θ. Будем предполагать, что закон распределения θ не зависит от x.

Рассмотрим один весьма интересный частный случай задачи (5.67) – (5.69), когда статистический критерий проверки (5.68) не зависит от распределения θ. Пусть требуется минимизировать

$$f^0(x) \tag{5.70}$$

при условии, что

$$\mathsf{P}\{f^i(x, \theta) \leqslant 0\} \geqslant p_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.71}$$

$$x \in X. \tag{5.72}$$

Рассмотрим случайные величины

$$\chi^i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f^i(x, \theta) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad f^i(x, \theta) > 0. \end{cases}$$

В соответствии с заданными испытаниями $\theta^1, \ldots, \theta^N$ имеем реализации $\chi_1^i, \ldots, \chi_N^i$ величин χ^i. Тогда, если x удовлетворяет i-му ограничению, то в последовательности $\chi_1^i, \ldots, \chi_N^i$ единица встретится с вероятностью, не меньшей p_i. Поэтому можно рассмотреть следующий статистический критерий [41] проверки (5.71). Для каждого из ограничений $i = 1, \ldots, m$ зададим уровень значимости α_i, числа γ_i, $0 \leqslant N_i \leqslant N$, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$.

Будем считать, что x удовлетворяет i-му ограничению, если в последовательности $\chi_1^i, \ldots, \chi_N^i$ число единиц больше N_i. Если их ровно N_i, то гипотеза о том, что x удовлетворяет i-му ограничению, принимается с вероятностью $1-\gamma_i$. Напомним, что α_i — вероятность того, что гипотеза будет отвергнута при условии, что она верна (уровень значимости). Тогда N_i, γ_i определяются из уравнения

$$\sum_{k=0}^{N_i-1} C_N^k p_i^k (1-p_i)^{N-k} + \gamma_i C_N^{N_i} p_i^{N_i} (1-p_i)^{N-N_i} = \alpha_i.$$

В соответствии с этим рассмотрим две задачи.

Задача 1. Найти такое x, которое минимизирует

$$f^0(x) \tag{5.73}$$

при условии, что для каждого $i=1, \ldots, m$ выполняется не менее N_i ограничений

$$f^i(x, \theta^k) \leqslant 0, \quad k=1, \ldots, N, \tag{5.74}$$

$$x \in X. \tag{5.75}$$

Задача 2. Она отличается от задачи 1 тем, что среди ограничений (5.74) для каждого $i=1, \ldots, m$ должны быть удовлетворены не менее N_i+1 ограничений.

Пусть x^1 и x^2 — соответственно оптимальные решения первой и второй задачи. Очевидно, что $f^0(x^1) \leqslant f^0(x^2)$. В соответствии с отмеченным выше критерием значимости α_i решение x^2 будет допустимым, а x^1 может оказаться недопустимым. Поэтому, если x^1 — допустимое решение, то оно будет оптимальным решением. В противном случае оптимальным будет x^2. Для того чтобы проверить, является ли допустимым x^1, требуется провести дополнительные испытания. Для этого выделяются те $i=1, \ldots, m$, для которых x^1 удовлетворяет ровно N_i ограничениям (5.74). Обозначим полученное множество номеров i через I. Для каждого $i \in I$ делается испытание, состоящее из двух исходов: единица с вероятностью $1-\gamma_i$ и 0 с вероятностью γ_i. Если для всех $i \in I$ испытание дало 1, то x^1 принимается как допустимое и, следовательно, как оптимальное решение; если нет, то за оптимальное решение принимается x^2.

3. Общие замечания. Очевидно, задачи 1 и 2 идентичны и в общем случае являются задачами частично-дискретного программирования. Для их решения нетрудно построить методы, основанные на общей идее метода ветвей и границ, причем в особенности они будут носить

простой характер тогда, когда область X дискретная, т. е. когда задача (5.67) — (5.69) является задачей дискретного стохастического программирования. Большой интерес представляет развитие специальных методов решения этих задач с линейными ограничениями (5.74) — (5.75) и при линейной функции цели (5.73). В этом случае задачи 1, 2 сводятся к следующей общей постановке:

Необходимо минимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что среди ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k x_j \leqslant b_i^k, \quad k=1, \ldots, N,$$

для каждого $i=1, \ldots, m$ выполняется не менее N_i,

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, m.$$

4. **Примеры.** Приведем две дискретные стохастические задачи и покажем, чему соответствуют в этом случае задачи 1, 2.

Стохастическая задача о ранце. Имеется n предметов, вес j-го предмета является случайной величиной a_j, полезность этого предмета выражается величиной c_j. Имеется ранец, вместимость которого равняется величине a. Необходимо наполнить ранец такими предметами, чтобы максимизировать суммарную полезность при условии, что вероятность того, что суммарный вес этих предметов не превышает a, не меньше p. Если ввести переменные x_j, принимающие значение 0 (предмет не вложен в ранец) или 1 (предмет вложен), то задача формулируется так:

Найти $x=(x_1, \ldots, x_n)$, которое максимизирует

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a\right\} \geqslant p, \quad x_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \ldots, n.$$

Задача (5.73) — (5.75) в данном случае формулируется так:

Найти $x = (x_1, \ldots, x_n)$, которое максимизирует

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что среди ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^k x_j \leqslant a, \quad k = 1, \ldots, N,$$

не менее K, $K \leqslant N$, удовлетворены и

$$x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, что эта задача легко решается известными приемами дискретного программирования [12]. Кроме того, она легко сводится к поиску *допустимых путей* на графе [25] и решается развитыми для этих целей методами.

Стохастическая задача о кратчайшем пути. Дан граф (I, U), каждой дуге (i, j) которого поставлено в соответствие случайное число τ_{ij} (время реализации) и число c_{ij} (стоимость). Необходимо найти из вершины s в вершину t путь наименьшей стоимости, для которого суммарное время реализации не превышает T с заданной вероятностью p. Задача (5.73) — (5.75) в данном случае формулируется так:

Найти путь $\mu = [i_0 = s, \; i_1, \ldots, i_m = t]$, стоимость которого $\sum_{l=1}^{m} c_{i_{l-1} i_l}$ является наименьшей при условии, что среди ограничений

$$\sum_{l=1}^{m} \tau_{i_{l-1} i_l}^k \leqslant T, \quad k = 1, \ldots, N,$$

выполняется не менее $K \leqslant N$. Эта задача решается методами построения кратчайших допустимых путей [25]. В данном случае допустимым путем называется путь, удовлетворяющий указанным ограничениям.

Дополнения к главе V

1. Предельные задачи с ограничениями. Седловые точки. Стохастический аналог метода Эрроу — Гурвица, рассмотренный в § 4 гл. III, связан с поиском седловой точки функции Лагранжа. Рассмотрим общую задачу поиска седловой точки некоторой функции $\Phi(x, y)$ в области $x=(x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y=(y_1, \ldots, y_m) \in Y$, т. е. такой пары точек (x^*, y^*), для которой

$$\Phi(x^*, y) \leqslant \Phi(x^*, y^*) \leqslant \Phi(x, y^*)$$

при всех $x \in X$, $y \in Y$, где $\Phi(x, y)$ — выпуклая вниз по x и выпуклая вверх по y функция; X, Y — выпуклые множества.

Пусть последовательность выпуклых вниз по x и выпуклых вверх по y функций $\Phi(N, x, y)$ равномерно сходится к $\Phi(x, y)$. Рассмотрим последовательность точек x^s, y^s, определенную соотношениями

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \gamma_s \xi^s),$$
$$y^{s+1} = \pi_Y(y^s - \rho_s \gamma_s \zeta^s),$$

где ξ^s, ζ^s — случайные векторы, для которых

$$\mathsf{M}(\xi^s / x^0, y^0, \ldots, x^s, y^s) = a_s \hat{\Phi}_x(x^s, y^s) + b^s,$$
$$\mathsf{M}(\zeta^s / x^0, y^0, \ldots, x^s, y^s) = a_s \hat{\Phi}_y(x^s, y^s) + d^s.$$

Пусть для данной процедуры выполнены предположения, аналогичные предположениям теоремы 7 гл. III, за исключением одного: вместо $F^0(x)$ строго выпуклыми по x должны быть функции $\Phi(N, x, y)$ при всех $y \in Y$ и $N=0, 1, \ldots$ Доказать, что одна из предельных точек последовательности x^s п. н. принадлежит множеству компонент X^* седловых точек (x^*, y^*), $x^* \in X^*$. Пусть, в дополнение к перечисленным условиям, функции $\Phi(N, x, y)$ строго выпуклые вверх по переменным y при $x \in X$ и $N=0, 1, \ldots$ Интересно было бы изучить сходимость последовательности точек x^s, y^s п. н. к одной из седловых точек функции $\Phi(x, y)$.

Последовательность выпукло-вогнутых функций $\Phi(x, y)$ легко превратить в последовательность строго выпукло-вогнутых функций, прибавляя слагаемое

$$\varepsilon_N(\|x\|^2 - \|y\|^2),$$

где $\varepsilon_N \to \infty$, $N \to \infty$. Таким образом, если вместо функции Лагранжа

$$\varphi(x, u) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i F^i(x),$$

где $F^\nu(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, — выпуклые вниз функции, рассмотреть

$$\varphi(N, x, u) = F^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i F^i(x) + \varepsilon_N(\|x\|^2 + \|u\|^2)$$

и применить предложенную выше процедуру, то получим последовательность точек x^s, сходящуюся п. н. к решению соответствующей экстремальной задачи.

2. Рассмотрим минимизацию

$$F(x) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} f(x, k).$$

Если через $\mathsf{P}_s(d\theta)$ обозначить равномерное распределение на множестве $\Theta_s = \{1, \ldots, s\}$, то

$$F(x) = \lim_{s\to\infty} \int f(x, \theta)\,\mathsf{P}_s(d\theta).$$

Применим процедуру (5.23) решения предельной экстремальной задачи. В данном случае вектор ξ^s в (5.23) вычисляется следующим образом. На s-м шаге с равной вероятностью выбирается число $\theta(s)$ множества Θ_s и берется

$$\xi^s = f_x(x^s, \theta(s)).$$

3. Задачи идентификации. Поведение объекта описывается стохастическими разностными уравнениями

$$z(k+1) = \mathfrak{X} z(k) + \eta(k),$$

где $\eta(k)$ — независимые случайные величины, $\mathsf{M}\eta(k) = 0$. Наблюдаются состояния объекта $z(0), \ldots, z(N)$. Требуется восстановить матрицу $\mathfrak{X}$. Искомая матрица, очевидно, минимизирует при каждом N функцию

$$F(N, \mathfrak{X}) = \mathsf{M}\,\|z(N+1) - \mathfrak{X} z(N) - \eta(N)\|^2 = \\ = \mathsf{M}\,\|z(N+1) - \mathfrak{X} z(N)\|^2 + \|\eta(N)\|^2.$$

Положим $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}^1 \\ \ldots \\ \mathfrak{X}^n \end{pmatrix}$, $\mathfrak{X}^i = (\mathfrak{X}_{i1}, \ldots, \mathfrak{X}_{in})$ и рассмотрим следующую процедуру:

$$\mathfrak{X}^i(s+1) = \mathfrak{X}^i(s) + \rho_s \gamma_s [z_i(s+1) - \mathfrak{X}^i(s) z(s)]\, z(s),$$

где $i = 1, \ldots, n$; $s = 0, 1, \ldots$ Эта процедура является частным случаем процедуры (5.23).

4. Статистические решения. Минимаксный подход. Вернемся к п. 9 дополнений к гл. IV.

Предположим, что множества Ω и Θ конечные, т. е. $\Omega = \{1, \ldots \ldots, r\}$, $\Theta = \{1, \ldots, m\}$. Тогда решающая функция характеризуется набором векторов $x = (x(1), \ldots, x(r))$, а риск равен

$$\Gamma(x, i) = \sum_{j=1}^{r} f(x(j), i)\, p(i, j).$$

Согласно минимаксному принципу решающая функция $x(j)$, $j = 1, \ldots, r$, должна минимизировать функцию

$$F(x(1), \ldots, x(r)) = \max_{1 \le i \le m} F(x(1), \ldots, x(r), i),$$
$$x(j) \in X, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Можно применить численные методы § 4 гл. V.

5. Стохастические сети с вероятностными ограничениями. Рассмотрим задачу об однородном потоке в сети со случайными пропускными способностями (сравните с (5.61) — (5.63) при $k=1$):

Найти совокупность неотрицательных чисел x_{ij}, $(i, j) \in U$, которая минимизирует

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

при условии, что

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = d_i, \quad i = 1, \ldots,$$

$$\mathrm{P}\{x_{ij} \leqslant r_{ij}(\theta)\} \geqslant p_{ij}, \quad (i, j) \in U.$$

Воспользуемся методом § 6. Пусть величины $r_{ij}(\theta)$ независимы и известны результаты наблюдений $r_{ij}^1 \leqslant r_{ij}^2 \leqslant \ldots r_{ij}^{N_{ij}}$. Чтобы среди ограничений $x_{ij} \leqslant r_{ij}^l$, $l = 1, \ldots, N_{ij}$, было удовлетворено не менее K_{ij}, следует выбрать $x_{ij} \leqslant r_{ij}^{N_{ij} - K_{ij}}$. Следовательно, задачи 1, 2 в данном случае сводятся к обычной сетевой транспортной задаче.

6. Зависимые экстремальные задачи. Иногда имеется набор взаимосвязанных экстремальных задач, в которых решение одних задач подготавливает информацию для решения других. Например, в задачах векторной оптимизации при выборе компромиссного решения рассматривается задача минимизации

$$F(x) = \max_k \left(f^k(x) - \min_{x \in X} f^k(x)\right)$$

В данном случае задачи минимизации $f^k(x)$ являются вспомогательными, они подготавливают информацию для основной задачи минимизации $F(x)$. Поскольку для решения каждой из вспомогательных задач требуется бесконечное число итераций, то минимизация $F(x)$ после их решения, вообще говоря, не дает точного минимума $F(x)$. Вместе с тем, если рассматривать последовательности точек $x^k(N)$, $N = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\lim_{N \to \infty} f^k(x^k(N)) = \min_{x \in X} f^k(x),$$

и предельную экстремальную задачу с функцией

$$F^N(x) = \max_k \left(f^k(x) - f^k(x^k(N))\right),$$

то при выполнении условий теоремы 6 процедура (5.18) позволяет найти точный минимум $F(x)$.

7. Метод случайного поиска и предельные задачи. При большой сложности вычисления градиента целевой функции $F(x)$ может оказаться полезным следующий прием, также приводящий к необходимости решения предельных экстремальных задач. Вместо

целевой функции $F(x)$ рассмотрим функцию

$$F(x, \delta) = \mathsf{M}F(x - \eta(\delta)) = \int\limits_{R^n} F(x-y)\, p(y, \delta)\, dy,$$

где $\eta(\delta)$ — случайная величина, плотность распределения $p(y, \delta)$ которой зависит от некоторого параметра δ и при $\|\delta\| \to 0$ сосредоточивается в 0, т. е. $F(x, \delta) \to F(x)$, $\|\delta\| \to 0$. Тогда при существовании соответствующих интегралов и $F(x-y)\, p(y, \delta) \to 0$, $\|\delta\| \to 0$,

$$F_x(x, \delta) = \int\limits_{R^n} F_x(x-y)\, p(y, \delta)\, dy = -\int\limits_{R^n} F(x-y) \frac{p_y(y, \delta)}{p(y, \delta)}\, p(y, \delta)\, dy.$$

Таким образом, случайная величина

$$-F(x - \eta(\delta)) \frac{p_y(\eta(\delta), \delta)}{p(\eta(\delta), \delta)}$$

при фиксированном x в среднем совпадает с градиентом $F(x, \delta)$.

Рассмотрев теперь последовательность $\{\delta^N\}$, $\|\delta^N\| \to 0$ и предельную экстремальную задачу с функциями $F^N(x) = F(x, \delta^N)$, получаем в соответствии с процедурой (5.23) при

$$\xi^s = -F(x^s - \eta^s(\delta^N))\, p_y(\eta^s(\delta^N), \delta^N) / p(\eta^s(\delta^N), \delta^N)$$

возможность организовать итеративный процесс, не использующий производных $F(x)$ или их аналогов (см. [38]).

8. Минимизация сложной функции $F(x) = \Phi(x, g(x))$ равносильна минимизации функции $\Phi(x, y)$ по переменным (x, y) при условии $g(x) = y$. В некоторых случаях эту идею можно применить для минимизации сложных функций регрессии § 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Приводимые библиографические указания ни в какой степени не претендуют на полноту — выделены в основном те работы, которые имеют к излагаемому материалу непосредственное отношение или широко доступны.

Глава I

§ 1. Основополагающей работой по аксиоматике теории вероятностей является работа А. Н. Колмогорова [40]. Превосходное изложение теоретико-вероятностных понятий и фактов имеется в монографиях И. И Гихмана и А. В. Скорохода [6], Дж. Дуба [14], М Лоэва [43], Ж. Невё [48], Ю. В. Прохорова и Ю. А. Розанова [55]. Достаточное введение в эту область дано в монографии М. Б Невельсона и Р. З. Хасьминского [47].

§ 2. Приведенная классификация задач выбора решений содержится у Р. Д. Льюса и Х Райфа [44].

§ 3. Постановки задач стохастического программирования начали анализироваться Дж. Данцигом, Чарнесом и Купером. Историческая справка и определенная классификация задач есть у Дж. Данцига [12], а также Е. Г Гольштейна и Д. Б Юдина [8]. Теорема Куна — Таккера и общие сведения по нелинейному программированию имеются у К Дж. Эрроу, Л. Гурвица и Х. Удзавы [64], У И. Зангвилла [34]. Доказательство теоремы 4 приведено, например, в монографии Б. Н. Пшеничного [56], по которой можно также познакомиться с исследованиями по необходимым признакам экстремума в задачах с негладкими функциями. Метод обобщенных градиентов предложен Н. З. Шором [63]. Доказательство теорем 5, 6 о его сходимости впервые дано автором. Приводимые доказательства основаны на работе [18]. Аналогичные результаты независимо получены Б Т Поляком [53]. Метод штрафных функций предложен Р. Курантом [68]. Детально познакомиться с ним можно по монографии А. Б Фиакко и Д. П. Мак-Кормика [59]. Метод штрафных функций (1.32) изучал И. И Еремин [16].

Прямой градиентный метод предложен Петшиковским [76]. Доказательство теорем 7 — 10 имеется у Д. Блекуэлла и М. А. Гиршика [3].

§ 4. Общие постановки задач стохастического программирования обсуждались, например, В. М. Ефимовым [33], А. И. Каплинским, А. С. Позняком и А. И. Пропоем [35], [36], Д. Б Юдиным [65], Ю. М. Ермольевым [21], [23] Теория математической статистики и статистических решений изложена в монографиях Г Крамера [41], Д. Блекуэлла и М А. Гиршика [3]. Примеры по оптимизации системы обслуживания и программному управлению случайным процессом взяты из работ автора Двухэтапная задача стохастического программирования впервые рассмотрена Данцигом и Маданским (см [12]), изучена Ветсом [80], Демпстером [69] и др.

Примеры простейшей коррекции в двухэтапных задачах рассматривались Дж. Данцигом [12]

Глава II

С непрямыми методами стохастического программирования можно познакомиться по работам Е. Г. Гольштейна и Д. Б. Юдина [8], Дж. Данцига [12], Д. Б. Юдина [65]. Признаки экстремума в задачах стохастического программирования в иной форме изучались В. М. Ефимовым, А. И. Каплинским, А. С. Позняком и А. И. Пропоем, Д. Б. Юдиным. Смешанные стратегии в задачах нелинейного программирования рассматривали Фромовиц [72], Ю. М. Ермольев [20], А. И. Каплинский и А. И. Пропой [37]. В работе [79] Тинтер проанализировал случаи, когда в предложенной им параметризации удается найти распределение величин $x_j(y, \theta)$ и минимизировать функцию (2.45) методами нелинейного программирования. Двухэтапные задачи с конечным числом состояний рассматривал Дж. Данциг [12]. Им же предложено использовать в этом случае блочное программирование.

Непрямые методы для задач с вероятностными ограничениями изучались Чарнесом и Купером [67]. Численный метод в задачах нелинейного программирования со смешанными стратегиями описан Ю. М. Ермольевым [20]. Решаемая при этом задача напоминает обобщенную задачу Вулфа (см. Дж. Данциг [12]).

Глава III

§ 1. Стохастический квазиградиентный метод предложен в работе Ю. М. Ермольева, З. В. Некрыловой [26] и развивался в работах Ю. М. Ермольева, З. В. Некрыловой [27], Ю. М. Ермольева, Н. З. Шора [31]. Изложение этого параграфа, основанное на понятии случайной квазифейеровской последовательности, следует работе Ю. М. Ермольева [19].

Свойства обычных (детерминированных) фейеровских последовательностей изучал Эгмон [66], их использовал И. И. Еремин [15], [17]. Понятие случайной квазифейеровской последовательности впервые введено в работе Ю. М. Ермольева и А. Д. Туниева [30].

§ 2. Основан на работе автора [19].

§ 3. Систематическое изложение методов случайного поиска для обычных задач нелинейного программирования дано в монографии Л. А. Растригина [57]. Связь стохастических квазиградиентных методов с известными методами случайного поиска указана Ю. М. Ермольевым и З. В. Некрыловой [26]. Следует подчеркнуть, что в методах случайного поиска, описанных Л. А. Растригиным [57], существенно используются точные значения минимизируемых функций (без информации о производных), поэтому их целесообразно применять при решении задач нелинейного программирования большой размерности. В стохастических квазиградиентных методах значения функций не используются, поэтому они применимы также в более сложных задачах — задачах стохастического программирования.

§ 4. Градиентный метод Эрроу — Гурвица развит К. Дж. Эрроу, Л. Гурвицем, Х. Удзавой [64]. Эрроу и Гурвиц изучали непрерывный вариант, Удзава — итеративный метод (с дискретным временем), однако при этом в доказательстве допущены ошибки. Стохастический вариант метода предложен Ю. М. Ермольевым и З. В. Некрыловой [27], теорема 7 получена автором.

§§ 5—7. Процедура (3.48)—(3.50) обобщает релаксационный метод Моцкина [75] для решения систем линейных неравенств и методы И. И. Еремина [15], [17] для нелинейных неравенств на случай, когда вектор $g(x^s)$, удовлетворяющий (3.50), вычисляется с ошибками.

Теоремы 8—11 получены автором. Детерминированный аналог (3.62)—(3.63) изучался И. И. Ереминым [15], [17].

Глава IV

§ 1. Метод стохастической аппроксимации для поиска во всем пространстве корня функции регрессии предложен в работе Роббинса и Монро [77], а для ее минимизации — в работе Кифера и Вольфовица [74]. Метод стохастической аппроксимации детально изложен, например, в монографиях М. Вазана [4], М. Б. Невельсона и Р. З. Хасьминского [47], в которых можно найти более подробные литературные указания. Разнообразные приложения этого метода обсуждаются в монографии Я. З. Цыпкина [61], где указана интересная связь этого метода с процедурами типа стохастической аппроксимации, получаемыми по методу потенциальных функций М. А. Айзермана, Э. М. Бравермана, Л. И. Розоноэра [1].

§ 2. Минимаксные задачи являются традиционными для отечественной школы математиков. Они возникают при решении несовместных систем уравнений, в задачах аппроксимации. С исследованиями в этой области можно познакомиться по обстоятельной монографии В. Ф. Демьянова и В. Н. Малоземова [13]. Игровая стохастическая задача рассмотрена Ю. М. Ермольевым [19].

§ 3. Стохастический квазиградиентный метод для двухэтапной задачи предложен в работе Ю. М. Ермольева и Н. З. Шора [31].

§ 4. Общие сведения по задачам управления можно найти в монографиях Н. Н. Красовского [42], Н. Н. Моисеева [46], Л. С. Понтрягина и др. [54].

Численные методы в задачах программного управления случайным процессом получены Ю. М. Ермольевым [19], [22].

§ 5. Связь метода стохастической аппроксимации с рекуррентным оцениванием многомерных параметров распределения отмечалась в самых первых работах, посвященных этому методу. Важные результаты имеются в монографии М. Б. Невельсона и Р. З. Хасьминского. Изложение этого параграфа основано на работе Ю. М. Ермольева и Е. А. Нурминского [29].

§ 6. Основан на работе Ю. М. Ермольева и Т. П. Марьяновича [24]. Сведения по теории случайных элементов (со значениями в абстрактных пространствах) имеются у И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [6], в работе [73].

Задача долгосрочного планирования рассмотрена В. М. Ефимовым. Стохастическую модель выбора оптимального состава машинно-тракторного парка изучала Н. Качегура. Задача распознавания и обучения рассмотрена М. А. Айзерманом, Э. М. Браверманом и Л. И. Розоноэром [1]. Связь предложенных ими методов со стохастической аппроксимацией заметил Я. З. Цыпкин.

Глава V

§ **1.** Общие условия сходимости (теорема 1), за небольшим изменением, получены Е. А. Нурминским [50]. Как отмечалось в тексте, эти условия напоминают предложенные У. И. Зангвиллом [34], но имеются и существенные отличия.

Теорема 1 дает удобный способ доказательства сходимости от противного с помощью анализа моментов выхода из окрестностей предельных точек. В отличие от распространенного подхода, близкого к методу функций Ляпунова теории устойчивости, такой подход дает преимущества в тех случаях, когда невозможно подобрать функцию с определенными свойствами монотонности вдоль траектории спуска (например, при минимизации негладких и невыпуклых функций).

§ **2.** Теоремы 3—5, лемма 3 принадлежат Е. А. Нурминскому [49], [50].

§ **3.** Основан на работе Ю. М. Ермольева и Е. А. Нурминского [28]. Предельные экстремальные задачи рассматривались в статье В. Я. Катковника и О. Ю. Кульчицкого [38], стохастические нестационарные задачи изучались Дупачем [70].

§ **4.** Сложные функции регрессии рассматривались Я. З. Цыпкиным, сходимость численных методов впервые изучена Ю. М. Ермольевым. Теорема 8 приводится впервые. Стохастическая минимаксная задача (5.28)—(5.29) со слабо выпуклыми функциями и численный метод (5.30)—(5.32) рассмотрены Е. А. Нурминским. Стохастический метод штрафных функций предложен Ю. М. Ермольевым [23]. Усреднение направлений спуска изучали Л. Г. Баженов и А. М. Гупал [9].

§ **5.** Детерминированный аналог метода линеаризации (линейной аппроксимации) описан, например, в монографии У. И. Зангвилла [34]. Стохастический метод изучался Л. Г. Баженовым и А. М. Гупалом [10]. Теорема 9 приводится впервые. Теория оптимальных однородных потоков в сетях содержится в монографии Л. Форда и Д. Фалкерсона [60]. Оптимальные неоднородные потоки рассматривались Ю. М. Ермольевым и И. М. Мельником [25]. Оптимальные потоки в стохастических сетях изучались автором. Задачи стохастического программирования с конечным числом состояний анализировались в работе Ю. М. Ермольева и И. М. Мельника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, «Наука», 1970
2. Арбузова Н. И., Вересков А. И., Николаева Н. Д., Некоторые задачи стохастического программирования (обзор), Экономика и математические методы, 5, 3 (1969).
3. Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, ИЛ, 1958
4. Вазан М., Стохастическая аппроксимация, «Мир», 1972.
5. Гермейер Ю. Б., Методические и математические основы исследования операций и теории игр, Изд-во МГУ, 1967
6. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, «Наука», 1965
7. Гладышев Е. Г., О стохастической аппроксимации, Теор. вероятн. и ее примен., 10, 2 (1965).
8. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, «Советское радио», 1966
9. Гупал А. М., Баженов Л. Г., Стохастический аналог метода сопряженных градиентов, Кибернетика, 1 (1972).
10. Гупал А. М., Баженов Л. Г., Стохастический метод линеаризации, Кибернетика, 3 (1972)
11. Данскин Дж. М., Теория максимина, перев. с англ., «Советское радио», 1970.
12. Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, «Прогресс», 1964.
13. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, «Наука», 1972.
14. Дуб Дж., Вероятностные процессы, ИЛ, 1958.
15. Еремин И. И., О некоторых итерационных методах в выпуклом программировании, Экономика и математические методы, 6 (1966).
16. Еремин И. И., Метод штрафов в выпуклом программировании, Кибернетика, 4 (1967).
17. Еремин И. И., Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании, Матем. заметки, 3, 2 (1968).
18. Ермольев Ю. М., Методы решения нелинейных экстремальных задач, Кибернетика, 4 (1966).
19. Ермольев Ю. М., О методе обобщенных стохастических градиентов и стохастических квазифейеровских последовательностях, Кибернетика, 2 (1969)
20. Ермольев Ю. М., Об одном методе решения задач стохастического программирования в смешанных стратегиях, Кибернетика, 1 (1970).
21. Ермольев Ю. М., О некоторых проблемах стохастического программирования, Кибернетика, 1 (1970).

22. Ермольев Ю. М., Об оптимальном управлении случайными процессами, Кибернетика, 2 (1970).
23 Ермольев Ю. М., Об одной общей задаче стохастического программирования, Кибернетика, 3 (1971).
24. Ермольев Ю. М., Марьянович Т. П., Оптимизация и моделирование, Проблемы кибернетики, 27 (1973).
25. Ермольев Ю. М., Мельник И М., Экстремальные задачи на графах, «Наукова думка», 1968.
26 Ермольев Ю. М., Некрылова З. В., О некоторых методах стохастической оптимизации, Кибернетика, 6 (1966).
27 Ермольев Ю. М., Некрылова З. В., Метод стохастических градиентов и его применение, сб. «Теория оптимальных решений», 1, Изд-во ИК АН УССР, 1967.
28 Ермольев Ю. М., Нурминский Е. А., Предельные экстремальные задачи, Кибернетика, 4 (1973).
29. Ермольев Ю. М., Нурминский Е А., Экстремальные задачи статистики и численные методы стохастического программирования, Сб. «Некоторые вопросы управления и моделирования систем», Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1973.
30. Ермольев Ю. М., Туниев А. Д., Случайные фейеровские и квазифейеровские последовательности, сб. «Теория оптимальных решений», 2, Изд-во ИК АН УССР, 1968.
31. Ермольев Ю. М., Шор Н. З., Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение, Кибернетика, 1 (1968).
32. Ефимов В. М., Динамическая модель планирования, сб. «Моделирование экономических процессов», 2, Изд-во МГУ, 1968.
33 Ефимов В. М., Исследование стохастических экстремальных задач с помощью функционального анализа, Кибернетика, 2 (1969).
34. Зангвилл У. И., Нелинейное программирование, перев. с англ., «Советское радио», 1973.
35. Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., Условия оптимальности для некоторых задач стохастического программирования, Автоматика и телемеханика, 8 (1971).
36. Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., О некоторых методах решения задач стохастического программирования, Автоматика и телемеханика, 10 (1971).
37. Каплинский А. И., Пропой А. И., О стохастическом подходе к задачам нелинейного программирования, Автоматика и телемеханика, 3 (1970).
38 Катковник В. Я., Кульчицкий О. Ю., Сходимость одного алгоритма случайного поиска, Автоматика и телемеханика, 8 (1972).
39 Коваленко И. Н., Москатов Г. К., Барзилевич Е. Ю., Полумарковские модели в задачах проектирования систем управления летательными аппаратами, «Машиностроение», 1973.
40. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936
41. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
42 Красовский Н Н., Теория управления движением, «Наука», 1968.
43 Лоэв М., Теория вероятностей, ИЛ, 1962.
44 Льюс Р. Д., Райфа Х., Игры и решения, ИЛ, 1962.

45. Михалевич В. С., Методы последовательной оптимизации, Кибернетика, 1 (1965).
46. Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, «Наука», 1971.
47. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, «Наука», 1972.
48. Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, «Мир», 1969.
49. Нурминский Е. А., О свойствах одного класса функций, сб. «Теория оптимальных решений», Изд-во ИК АН УССР, 1972.
50. Нурминский Е. А., Условия сходимости алгоритмов нелинейного программирования, Кибернетика, 6 (1972).
51. Нурминский Е А., Квазиградиентный метод решения задачи нелинейного программирования, Кибернетика, 1 (1973).
52. Нурминский Е. А., Условия сходимости алгоритмов стохастического программирования, Кибернетика, 3 (1973).
53. Поляк Б. Т., Об одном общем методе решения экстремальных задач, ДАН СССР, 174, 1 (1967).
54. Понтрягин Л. С., Болтянский В Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
55. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, «Наука», 1973
56. Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, «Наука», 1969.
57. Растригин Л. А., Теория статистических методов поиска, «Наука», 1968.
58. Тихонов А. Н., О регуляризации некорректно поставленных задач, ДАН СССР, 153, 1 (1963).
59. Фиакко А. Б., Мак-Кормик Д. П., Методы последовательной безусловной минимизации, «Мир», 1973.
60. Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях, «Мир», 1966.
61. Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, «Наука», 1968.
62. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, «Наука», 1969.
63. Шор Н. З., О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования, Автореферат диссертации, ИК АН УССР, 1964.
64. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.
65. Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, «Советское радио», 1974.
66. Agmon S., The relaxation method for linear inequalities, Canad. J Math., 6, 3 (1954).
67. Charnes A., Cooper W. W., Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints, Oper. Res., 11, 1 (1963).
68. Courant R., Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1 (1943).

69. Dempster M. A. H., On stochastic programming, J. Math Anal. and Appl., 21, 2 (1968).
70. Dupač V., A dynamic stochastic approximation method, Ann. Math. Stat., 36, 6 (1965).
71. Fabian V., Stochastic approximation method, Чехословацкий матем. журнал, 10 (85), 2 (1960).
72. Fromovitz S., Non-Linear programming with randomization, Management Science, VII, 9 (1965).
73. Hanš O., Generelized random variables, Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1956.
74. Kiefer J., Wolfowitz J., Stochastic estimation of the maximum of a regression function, Ann. Math. Stat., 23, 3 (1952).
75. Motzhin T. S., Schanberg J. J., The relaxation method for linear inequalities, Canad. J. Math., 6, 3 (1954).
76. Pietszykowski T., On an iteration method for maximizing a nonconcave function on a convex set, Prace ZAM, ser. A, 13 (1961).
77. Robbins H., Monro S., A stochastic approximation method, Ann. Math. Stat., 22, 3 (1951).
78. Sacks J., Asymptotic distributions of stochastic approximations, Ann. Math. Stat., 29, 2 (1958).
79. Tinter G., Stochastic linear programming with applications to agricultural economics, The Second Symposium in Linear Programming, 1955, стр. 197—228.
80. Wets R., Programming under uncertainty, The solution set «SIAM Journ. Appl. Math.», 14, 5 (1966).

Юрий Михайлович Ермольев

Методы стохастического программирования

(Серия: «Оптимизация и исследование операций»)

М., 1976 г. 240 стр. с илл.

Редакторы *Ю. А. Флеров, М. М. Горячая*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. С. Плетнева, Е. В. Сидоркина*

Сдано в набор 18/XI-1975 г. Подписано к печати 30/III-1976 г. Бумага 84×108¹/₃₂ тип. № 1. Физ. печ. л. 7,5. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,51. Тираж 16 000 экз. Т-05642. Цена книги 82 к. Заказ № 683.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976